

ב"א אנליזה 2 תשפ מועד א

1. חשבו את:

$$\int \frac{x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 5x + 3}{(x+1)(x^2+2x+2)} dx \quad (א)$$

פתרון: נבצע חילוק פולינומים בין המונה שמדרגה 4 למכנה שהוא

$$(x+1)(x^2+2x+2) = x^3 + 3x^2 + 4x + 2$$

שמדרגה 3:

$$\begin{array}{r} x \\ x^3 + 3x^2 + 4x + 2 \overline{) x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 5x + 3} \\ \underline{-x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 2x} \\ x^2 + 3x + 3 \end{array}$$

וקיבלנו ש

$$x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 5x + 3 = x(x+1)(x^2+2x+2) + (x^2+3x+3)$$

ולכן

$$\int \frac{x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 5x + 3}{(x+1)(x^2+2x+2)} dx = \int \frac{x(x+1)(x^2+2x+2) + (x^2+3x+3)}{(x+1)(x^2+2x+2)} dx =$$

$$\int x dx + \int \frac{x^2+3x+3}{(x+1)(x^2+2x+2)} dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{x^2+3x+3}{(x+1)(x^2+2x+2)} dx$$

נמשיך עם האינטגרל השני. נשים לב ש x^2+2x+2 פולינום אי פריק (הוא מדרגה 2 ואין לו שורשים). לכן הפירוק לשברים חלקיים הוא

$$\frac{x^2+3x+3}{(x+1)(x^2+2x+2)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{Bx+C}{(x^2+2x+2)}$$

עבור איזה שהן קבועים A, B, C . נמצא אותם: נעשה מכנה משותף ונשווה מונים לקבל

$$x^2+3x+3 = A(x^2+2x+2) + (Bx+C)(x+1)$$

וכעת נוכל להציב $x = -1$ לקבל

$$1 = A$$

ולכן $A = 1$. נציב $x = 0$ לקבל

$$3 = 1 \cdot 2 + C$$

ולכן $C = 1$. לסיום נשווה את המקדם של x^2 בשני האגפים - באגף שמאל זה 1 ובאגף ימין זה $A + B$ לכן

$$1 = A + B$$

וקיבלנו ש

$$B = 1 - A = 1 - 1 = 0$$

לכן:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 3x + 3}{(x+1)(x^2 + 2x + 2)} dx &= \int \frac{1}{(x+1)} dx + \int \frac{1}{(x^2 + 2x + 2)} dx = \\ &= \ln|x+1| + \int \frac{1}{(x+1)^2 + 1} dx = \ln|x+1| + \arctan(x+1) + C \end{aligned}$$

כאשר האינטגרל האחרון מחושב לפי ה"זכרו". לסיכום התרגיל:

$$\int \frac{x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 5x + 3}{(x+1)(x^2 + 2x + 2)} dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x+1| + \arctan(x+1) + C$$

$$(ב) \int \frac{\sin(e^{-x})}{e^x} dx$$

פתרון: נשתמש בהצבה:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin(e^{-x})}{e^x} dx &= \int \sin(e^{-x}) e^{-x} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = e^{-x} \\ dt = -e^{-x} dx \end{array} \right\} = \\ &= \int -\sin(t) dt \\ &= \cos(t) + C \\ &= \cos(e^{-x}) + C \end{aligned}$$

2.

(א) מצאו את כל האסימפטוטות (אנכיות ו/או משופעות) של הפונקציה $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{(x+1)^2}$. **פתרון:** נשים לב כי

$$x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x-2)(x+1)$$

ולכן $f(x) = \frac{x(x-2)}{x+1}$ לכל $x \neq -1$. כעת:

אסימפטוטות אנכיות: הפונקציה לא מוגדרת -1 , נחשב את הגבול

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 - 2x}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x-2)}{x+1} = \left\{ \frac{3}{0^\pm} \right\} = \pm\infty$$

כאשר הסימן ∞ כאשר הגבול מימין ל -1 הוא ∞ והגבול משמאל ל -1 הוא $-\infty$ ולכן יש אסימפטוטה אנכית ב $x = -1$.

אסימפטוטה משופעת מימין: נחשב את הגבול

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-2)(x+1)}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 - \frac{2}{x})(1 + \frac{1}{x})}{x^2(1 + \frac{1}{x})^2} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$$

ואז

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x-2)}{x+1} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x-2) - x(x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x}{x+1} = -3$$

ולכן יש אסימפטוטה משופעת מימין שהיא $x - 3$.

אסימפטוטה משופעת משמאל: נחשב את הגבול

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-2)(x+1)}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(1 - \frac{2}{x})(1 + \frac{1}{x})}{x^2(1 + \frac{1}{x})^2} = 1$$

1

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - ax = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x-2)}{x+1} - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x-2) - x(x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{x+1} = -3$$

ולכן יש אסימפטוטה משופעת משמאל שהיא $x - 3$.

(ב) מצאו את כל האסימפטוטות (אנכיות ו/או משופעות) של הפונקציה $f(x) = e^{\ln(x)}$.

פתרון: לכל $x > 0$ מתקיים כי $f(x) = x$ ולכל $x \leq 0$ הפונקציה לא מוגדרת. לכן אין ל f יש רק אסימפטוטה משופעת מימין שהיא הישר x .

3.

(א) חשבו את הגבול

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{-x}^x \sin(t^2) dt}{x - x \cos(x)}$$

פתרון: כיוון ש $\lim_{x \rightarrow 0} \int_{-x}^x \sin(t^2) dt = 0$ (כיוון ש $\sin(t^2)$ רציפה והקטע בו עושים אינטגרל שואף ל 0) נוכל בעזרת המשפט היסודי של החדוא לקבל:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{-x}^x \sin(t^2) dt}{x - x \cos(x)} \stackrel{\frac{0}{0}, L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin(x^4) - (-1) \sin(x^2)}{1 - \cos(x) + x \sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x \sin(x^4) + \sin(x^2)}{x^2}}{\frac{1 - \cos(x) + x \sin(x)}{x^2}}$$

כעת נחשב את הגבול של המונה והמכנה ונגיע לתשובה הסופית:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin(x^4) + \sin(x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 \sin(x^4)}{x^4} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = 2 \cdot 0 \cdot 1 + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x) + x \sin(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{2} + 1 = 1\frac{1}{2}$$

לכן התשובה הסופית היא

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x \sin(x^4) + \sin(x^2)}{x^2}}{\frac{1 - \cos(x) + x \sin(x)}{x^2}} = \frac{1}{1\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

(ב) חשבו את גבול הסדרה $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{k \sin(\frac{k}{n})}{n^2}$ **פתרון:** נראה שזהו סכום רימן:

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{k \sin(\frac{k}{n})}{n^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{k}{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right)$$

ועבור $f(x) = x \sin(x)$ שהיא רציפה בקטע $[0, 1]$ נקבל ש

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x \sin(x) dx$$

נחשב את $\int x \sin(x) dx$ בעזרת אינטגרציה בחלקים:

כעת נקבל

$$\int x \sin(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} g = x \\ f' = \sin(x) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} g' = 1 \\ f = -\cos(x) \end{array} \right\} = -x \cos(x) + \int \cos(x) dx =$$

$$= -x \cos(x) + \sin(x) + C$$

ולכן

$$a_n \rightarrow \int_0^1 x \sin(x) dx = [-x \cos(x) + \sin(x)] \Big|_0^1 = -\cos(1) + \sin(1)$$

וזוהי התשובה הסופית.

.4

(א) קרבו את $\frac{1}{\sqrt{e}}$ עד כדי שגיאה של $\frac{1}{100}$. $h =$

פתרון: טור טיילור של e^x הוא

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

ואם נציב $x = -\frac{1}{2}$, נקבל

$$\frac{1}{\sqrt{e}} = e^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot 2^n}$$

וונקבל שזהו טור לייבניץ ולכן מתקיים שלכל k , יש את החסם

$$\left| \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot 2^n} \right| \leq \left| \frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k} \right| = \frac{1}{k! \cdot 2^k}$$

שזהו חסם על השגיאה $\left| \frac{1}{\sqrt{e}} - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(-1)^n}{n! \cdot 2^n} \right|$. כיוון שרוצים שגיאה שקטנה מ $\frac{1}{100}$ נחפש k עבורו $\frac{1}{k! \cdot 2^k} \leq \frac{1}{100}$. עבור $k = 4$ נקבל $\frac{1}{4! \cdot 16} = \frac{1}{384} < \frac{1}{100}$ מכאן שהקירוב

$$\sum_{n=0}^{4-1} \frac{(-1)^n}{n! \cdot 2^n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2! \cdot 2^2} - \frac{1}{3! \cdot 2^3} = \frac{29}{48} \approx 0.604166$$

עם שגיאה קטנה מ $\frac{1}{100}$ כמבוקש.

(ב) חשבו את $f^{(46)}(0)$ עבור $f(x) = 2 \sin(x) \cos(x)$. **פתרון:** נשים לב ש $f(x) = \sin(2x)$ (זהות טריגו). כעת, פיתוח טיילור של $\sin(x)$ סביב 0 הוא

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

לכן טור טיילור של $\sin(2x)$ הוא

$$\sin(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

לפי התיאוריה, ידוע שהמקדם של x^{46} הוא $\frac{f^{(46)}(0)}{46!}$. בטור שמצאנו המקדם של x^{46} הוא 0 (בטור שלנו, החזקות שהמקדם שלהם לא אפס הם אי זוגיות מהצורה $2n+1$) לכן

$$\frac{f^{(46)}(0)}{46!} = 0$$

ומכאן ש $f^{(46)}(0) = 0$.

5. תהא f פונקציה רציפה המקיימת לכל $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$, וכמו כן $y = mx + b$ אסימפטוטה משופעת מימין של f .

(א) הוכיחו/הפריכו: $y = -mx - b$ אסימפטוטה משופעת משמאל של f .

פתרון: הפונקציה הקבועה $f(x) = 1$ מקיימת כי $f(x) = 1 = f(-x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$ אבל

$$y = 1$$

היא אסימפטוטה משופעת גם מימין וגם משמאל (לעומת $y = -1$ שאיננה).

$$(ב) \text{ הוכיחו/הפריכו: } \lim_{x \rightarrow (-\infty)} f(x) + mx = b$$

פתרון: טענה $y = -mx + b$ אסימפטוטה משופעת משמאל של f .

הוכחה: לכל $x \neq 0$ ממשי מתקיים כי

$$\frac{f(x)}{x} = -\frac{f(-x)}{-x}$$

ולכן

$$\lim_{x \rightarrow (-\infty)} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow (-\infty)} -\frac{f(-x)}{-x} = -\lim_{x \rightarrow (-\infty)} \frac{f(-x)}{-x} = -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = -m$$

כאשר המעבר האחרון נובע מהנתון ש $y = mx + b$ אסימפטוטה משופעת מימין של f . בנוסף, לפי אותו נתון,

$$\lim_{x \rightarrow (-\infty)} f(x) - (-mx) = \lim_{x \rightarrow (-\infty)} f(x) + mx = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + m(-x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = b$$

והוכחנו שאכן $y = -mx + b$ אסימפטוטה משופעת משמאל של f ובסוף ההוכחה הוכחנו את הדרוש בשאלה.