

מבחן מועד ד' – 86-147 חדו"א 1 לאודיסאה 05/09/24 – הצעה לפתרון מאת עדי מכנס

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משך המבחן: שלוש שעות

מרצה: ד"ר ארז שיינר

כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

ענו על כל השאלות

משקל כל שאלה: 20 נק'

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(2x) \ln(1+5x)}{\tan(3x^2)}$

פתרון:

נשים לב תחילה לגבולות הללו:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} \stackrel{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} \stackrel{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^2(x)} = 1$$

נעת ניעזר בעקרון WIN כדי לחשב את הגבול הנתון:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(2x) \ln(1+5x)}{\tan(3x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\arctan(2x)}{2x}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{3x^2}{\tan(3x^2)}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{\ln(1+5x)}{5x}}_{\rightarrow 1} \cdot \frac{2x \cdot 5x}{3x^2} = \frac{10}{3}$$

כאשר כלל הגבולות לעיל נתונים ע"י הצבה של רציפות בגבולות ידועים, וכן בגבולות שחישבתי לעיל.

ב. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(x) \ln(x)$

פתרון:

מדובר במקרה של $0 \cdot \infty$. לכן:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(x) \ln(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{\sin(x)}} \stackrel{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\sin(x) \tan(x)}{x} = \\ &= -(0 \cdot 1) = 0 \end{aligned}$$

עקב הגבול שחישבתי בסעיף הקודם.

ג. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{(2^n)}}{(2n)!}$

פתרון:

ניעזר בכלל המנה:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{(2^{n+1})}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{2^{(2^n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{(2^{n+1}-2^n)}}{(2n+1)(2n+2)}$$

אבל נשים לב כי:

$$2^{n+1} - 2^n = 2 \cdot 2^n - 2^n = 2^n(2 - 1) = 2^n$$

ולכן עלינו לחשב את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{(2^n)}}{4n^2 + 6n + 2}$$

נשים לב כי החל משלב מסויים:

$$2^n > 4n^2 + 6n + 2$$

זאת, כיוון שקל לחשב כי הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{4n^2 + 6n + 2} = \infty$$

מסדר גודל. לפיכך, לפי הגדרת הגבול, החל משלב מסויים:

$$\frac{2^n}{4n^2 + 6n + 2} > 1$$

ומכאן:

$$2^n > 4n^2 + 6n + 2$$

לכן ניתן להגדיל את המכנה בגבול הנורא ולהקטין את הביטוי (שינוי מספר סופי של צעדים לא משפיע על התכנסות):

$$2^{(2^n-n)} = \frac{2^{(2^n)}}{2^n} \leq \frac{2^{(2^n)}}{4n^2 + 6n + 2}$$

אבל הרי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n - n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \left(1 - \frac{n}{2^n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$$

מסדרי גודל. לפיכך:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{(2^n-n)} = \infty$$

ומכאן לפי חצי סנדוויץ' גם:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{(2^n)}}{4n^2 + 6n + 2} = \infty$$

ולכן כיוון שהמנה שואפת לאינסוף, גם הגבול הנתון בשאלה הוא אינסוף.

2.

א. חשבו את $\int \frac{\tan(x)}{\cos^2(x)} dx$.

פתרון:

נשים לב כי הנגזרת של $\tan(x)$ היא $\frac{1}{\cos^2(x)}$. לפיכך האינטגרנד הוא מכפלת הפונקציה בנגזרתה,

ומכאן:

$$\int \frac{\tan(x)}{\cos^2(x)} dx = \frac{1}{2} \tan^2(x) + C$$

(לקוראים המבולבלים, הציבו $t = \tan(x)$ והיווכחו לראות כי אני צודק).

ב. חשבו את $\int \frac{x^4+x^2+x+1}{x^3+x} dx$.

פתרון:

נחלק פולינומים:

$$\frac{x}{x^4+x^2+x+1} \Big| \frac{x+1}{x^3+x} - \frac{x^4+x^2}{x+1}$$

כלומר:

$$\int \frac{x^4+x^2+x+1}{x^3+x} dx = \int x dx + \int \frac{x+1}{x^3+x} dx$$

נפרק לשברים חלקיים את האינטגרנד הימני ונקבל:

$$\frac{x+1}{x^3+x} = \frac{x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

נעשה מכנה משותף ונקבל:

$$x+1 = A(x^2+1) + x(Bx+C)$$

נציב $x=0$ ונקבל:

$$1 = A$$

כעת נשווה מקדמים:

$$x+1 = x^2+1+Bx^2+Cx$$

ולכן:

$$B=0$$

$$C=1$$

ובסה"כ:

$$\int \frac{x+1}{x^3+x} dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx = \ln|x| + \arctan(x)$$

וסה"כ:

$$\frac{1}{2}x^2 + \ln|x| + \arctan(x) + C$$

3.

א. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $x = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

פתרון:

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x$$

נשים לב שלכל $x \neq 0$, פונקציה זו רציפה כצירוף רציפות.

כעת, יהי $k \in \mathbb{N}$. נשים לב כי:

$$h\left(\frac{1}{\pi k}\right) = \sin(\pi k) - \frac{1}{\pi k} = -\frac{1}{\pi k} < 0$$

מצד שני, נשים לב בנוסף כי:

$$h\left(\frac{1}{2\pi k + \frac{\pi}{2}}\right) = \sin\left(2\pi k + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2\pi k + \frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{2\pi k + \frac{\pi}{2}} \geq 0$$

ולפיכך ממשפט ערך הביניים, בכל קטע $\left[\frac{1}{\pi k}, \frac{1}{2\pi k + \frac{\pi}{2}}\right]$ ישנו שורש לפונקציה h (כי היא רציפה), ולכן יש אינסוף פתרונות לכל k טבעי.

ב. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $x + 1 = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

פתרון:

נעביר אגף ונבנה פונקציה:

$$h(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x - 1$$

כעת, ברור (כמו מקודם) כי h רציפה לכל $x \neq 0$ כצירוף רציפות.

כמו מקודם, יהי $k \in \mathbb{N}$. נציב:

$$h\left(\frac{1}{-\pi k}\right) = \sin(-\pi k) + \frac{1}{\pi k} - 1 = 1 - \frac{1}{\pi k} > 0$$

וכן נציב:

$$h\left(\frac{1}{-2\pi k - \frac{\pi}{2}}\right) = \sin\left(-2\pi k - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2\pi k + \frac{\pi}{2}} - 1 = -2 + \frac{1}{2\pi k + \frac{\pi}{2}} < 0$$

ולכן בכל קטע $\left[-2\pi k - \frac{\pi}{2}, -\pi k\right]$ ישנו שורש לפונקציה h - ומכאן שיש אינסוף פתרונות למשוואה (לכל טבעי).

4.

א. הוכיחו/הפריכו: $g(x) = x \cdot |x|$ גזירה בכל $\mathbb{R}$.

פתרון:

הוכחה

ידוע כי לכל $x \neq 0$ הפונקציה $|x|$ גזירה, ולכן מצירוף גזירות הפונקציה g גזירה לכל $x \neq 0$.
 כעת עבור $x = 0$ נחשב את הנגזרת לפי הגדרה:

$$g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} |h| = 0$$

ובסה"כ הפונקציה g גזירה בכל $\mathbb{R}$.

■ משל

ב. הוכיחו/הפריכו: תהי $f(x)$ הגזירה בנקודה x_0 , $f(x \cdot |x|)$ גזירה ב x_0 .

פתרון:

הפרכה

נגדיר את הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} 42 & x \leq 4 \\ 17 & x > 4 \end{cases}$$

קל לראות כי הפונקציה f גזירה בנק' $x_0 = 2$, אך בנקודה $4 = 2 \cdot |2|$ הפונקציה אינה גזירה.

אבל רגע? מה עם נגזרת של הרכבה? איך זה מסתדר??

התשובה היא שבנגזרת של הרכבה, דורשים שהחיצונית תהא גזירה ב $f(x_0)$, אבל זה לא בהכרח מתקיים כאן.

5. תהי סדרה a_n המקיימת לכל n כי $a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + a_n + 1$ וכן $a_1 > 0$.

א. הוכיחו כי הסדרה מונוטונית עולה.

פתרון:

יהי n טבעי. נקבל כי:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_n} + 1 \geq 0$$

נוכיח באינדוקציה (זריזה ממש) כי לכל n מתקיים כי $a_n > 0$.

בסיס: נתון כי $a_1 > 0$.

צעד: יהי n עבורו הטענה מתקיים, נוכיח עבור $n + 1$. אכן:

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + a_n + 1 > 0$$

שכן זהו סכום חיוביים.

■ משל

ב. חשבו את גבול הסדרה.

פתרון:

כיוון שהסדרה מונוטונית, אזי היא מתכנסת לגבול סופי או שואפת לאינסוף. נב"ש כי היא מתכנסת לגבול סופי. נשאיף את שני צידי נוסחת הנסיגה:

$$L \leftarrow a_n \leftarrow a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + a_n + 1 \rightarrow L$$

$$L = \frac{1}{L} + L + 1$$

$$\frac{1}{L} + 1 = 0$$

$$L = -1$$

אבל כיוון שהסדרה חיובית (הוכחנו), אזי מקרה זה לא יכול להיות, שכן אז החל משלב מסוים כלל האיברים יהיו שלילים, בסתירה.

■ משל

6. א. חשבו את גבול הסדרה

$$a_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n^3}}$$

פתרון:

נשים לב כי:

$$a_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n^3}} = \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{k}{n}} \stackrel{n \geq 0}{=} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \sqrt{\frac{k}{n}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right)$$

כאשר $f(x) = \sqrt{x}$. כיוון שפונקציה זו רציפה בקטע $[0,1]$, אזי גבול הסדרה הוא:

$$\int_0^1 \sqrt{x} dx = \left[\frac{1}{1.5} \cdot x^{1.5} \right]_0^1 = \frac{1\sqrt{1}}{1.5} - 0 = \frac{1}{1.5} = \frac{2}{3}$$

ב. קרבו את $\frac{e}{\sqrt{e}}$ עד כדי שגיאה של $h = \frac{1}{100}$.

פתרון:

עלינו לקרב את:

$$\frac{e}{\sqrt{e}} = \sqrt{e} = e^{0.5}$$

נחשב לפי פולינום טיילור של הפונקציה $f(x) = e^x$, סביב הנקודה המצויה $a = 0$ ובנק' הרצויה $x = 0.5$.

בכדי לחשב את השגיאה, נדע כי לכל n :

$$f^{(n)} = e^x$$

לפיכך, לכל n קיים $0 < c < 0.5$ כך שמתקיים כי:

$$|R_n(0.5)| = \left| \frac{e^c (0.5 - 0)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \frac{e^c}{2^{n+1}(n+1)!} \leq \frac{e^1}{2^{n+1}(n+1)!} \leq \frac{3}{2^{n+1}(n+1)!} < \frac{1}{100}$$

קל לראות כי עבור $n = 3$ הנ"ל מתקיים (איזו הקלה!) ולכן עבור פ"ט מסדר 3 נקבל הדרוש. לכן:

$$P_3(e^x, 0)(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

(יש להראות זאת במבחן אבל זה די קל). נציב $x = 0.5$ ונקבל:

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{4}}{2} + \frac{\frac{1}{8}}{6} = 1.6458333 \dots$$