

מערכי תרגול קורס 89-214 סמסטר א' תשע"ו מבנים אלגבריים למדעי המחשב

אוקטובר 2015, גרסה 0.8

מבוא

נתחיל עם כמה דגשים:

- דף הקורס נמצא באתר www.math-wiki.com.
- שאלות בנוגע לחומר הלימודי מומלץ לשאול בדף השיחה באתר של הקורס.
- ישנה חובת הגשת תרגילים, אבל בודקים רק לחצי מהסטודנטים (ואולי יהיו בחנים שיתבססו על התרגילים).
- נשמח לכל הערה על מסמך זה.

1 מבוא לתורת המספרים

נסמן כמה קבוצות של מספרים:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ המספרים הטבעיים.
- $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ המספרים השלמים (מגרמנית: Zahlen).
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$ המספרים הרציונליים.
- \mathbb{R} המספרים הממשיים.
- \mathbb{C} המספרים המרוכבים.

מתקיים $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

הגדרה 1.1. יהיו a, b מספרים שלמים. נאמר כי a מחלק את b אם קיים $k \in \mathbb{Z}$ כך ש- $ka = b$, ונסמן $a|b$. למשל $5|10$.

משפט 1.2 (משפט החילוק, או חלוקה אוקלידית). לכל $d \neq 0, n \in \mathbb{Z}$ קיימים q, r יחידים כך ש- $n = qd + r$ וגם $0 \leq r < |d|$.

המשפט לעיל מתאר "מה קורה" כאשר מחלקים את n ב- d . הבחירה בשמות הפרמטרים במשפט מגיעה מלע"ז (מאנגלית?) quotient (מנה) ו-remainder (שארית).

הגדרה 1.3. בהנתן שני מספרים שלמים n, m המחלק המשותף המירבי (ממ"מ, greatest common divisor) שלהם מוגדר להיות המספר

$$\gcd(n, m) = \max \{d \in \mathbb{N} : d|n \wedge d|m\}$$

לעיתים נסמן (n, m) . למשל $(6, 10) = 2$. נאמר כי n, m זרים אם $(n, m) = 1$. למשל $(2, 5) = 1$.

הערה 1.4. אם $d|a$ וגם $d|b$, אזי d מחלק כל צירוף לינארי של a ו- b .

טענה 1.5. אם $n = qm + r$, אז $(n, m) = (m, r)$.

הוכחה. נסמן $d = (n, m)$, וצ"ל כי $d = (m, r)$. אנו יודעים כי $d|n$ וגם $d|m$. אנו יכולים להציג את r כצירוף לינארי של n, m , ולכן $d|r = n - qm$. מכך קיבלנו $d \leq (m, r)$.

כעת, לפי הגדרה $(m, r)|r$ וגם $(m, r)|m$, ולכן $(m, r)|n$ כי n הוא צירוף לינארי של m, r . אם ידוע כי $(m, r)|m$ וגם $(m, r)|n$, אזי $(m, r) \leq d$. סך הכל קיבלנו כי $d = (m, r)$. \square

משפט 1.6 (אלגוריתם אוקלידס). "המתכוון" למציאת ממ"מ בעזרת שימוש חוזר בטענה 1.5 הוא אלגוריתם אוקלידס. ניתן להניח $0 \leq m < n$. אם $m = 0$, אזי $(n, m) = n$. אחרת נכתוב $n = qm + r$ כאשר $0 \leq r < m$ ונמשיך עם $(n, m) = (m, r)$. (הבינו למה האלגוריתם חייב להעצר).

דוגמה 1.7. נחשב את הממ"מ של 53 ו-47 בעזרת אלגוריתם אוקלידס

$$(53, 47) = [53 = 1 \cdot 47 + 6]$$

$$(47, 6) = [47 = 7 \cdot 6 + 5]$$

$$(6, 5) = 1$$

דוגמה נוספת עבור מספרים שאינם זרים:

$$(224, 63) = [224 = 3 \cdot 63 + 35]$$

$$(63, 35) = [63 = 1 \cdot 35 + 28]$$

$$(35, 28) = [35 = 1 \cdot 28 + 7]$$

$$(28, 7) = [28 = 4 \cdot 7 + 0]$$

$$(7, 0) = 7$$

משפט 1.8 (אפיון הממ"מ כצירוף לינארי מזערי). מתקיים לכל מספרים שלמים a, b כי

$$(a, b) = \min_{u,v} \{au + bv \in \mathbb{N}\}$$

בפרט קיימים $s, t \in \mathbb{Z}$ כך ש- $(a, b) = sa + tb$.

הערה 1.9. מן המשפט קיבלנו כי $(a, b) \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$.

דוגמה 1.10. כדי למצוא את המקדמים s, t כשמביעים את הממ"מ כצירוף לינארי כנ"ל נשתמש באלגוריתם אוקלידס המוכלל:

$$(234, 61) = [234=3 \cdot 61+51 \Rightarrow 51 = 234 - 3 \cdot 61]$$

$$(61, 51) = [61=1 \cdot 51+10 \Rightarrow 10 = 61 - 1 \cdot 51 = 61 - 1 \cdot (234 - 3 \cdot 61) = -1 \cdot 234 + 4 \cdot 61]$$

$$(51, 10) = [51=5 \cdot 10+1 \Rightarrow 1 = 51 - 5 \cdot 10 = 51 - 5 \cdot (-1 \cdot 234 + 4 \cdot 61) = 6 \cdot 234 - 23 \cdot 61]$$

$$(10, 1) = 1$$

$$\text{ולכן } (234, 61) = 1 = 6 \cdot 234 - 23 \cdot 61$$

תרגיל 1.11. יהיו a, b, c מספרים שלמים כך ש- $(a, b) = 1$ וגם $a|bc$. הראו כי $a|c$.

פתרון. לפי אפיון הממ"מ כצירוף לינארי, קיימים s, t כך ש- $1 = sa + tb$. נכפיל ב- c ונקבל $c = sac + tbc$. ברור כי $a|sac$ ולפי הנתון גם $a|tbc$. לכן $a|(sac + tbc)$, כלומר $a|c$.

טענה 1.12. תכונות של ממ"מ:

$$1. \text{ יהי } d = (n, m) \text{ ויהי } e \text{ כך ש-} e|m \text{ וגם } e|n, \text{ אזי } e|d.$$

$$2. (an, am) = |a|(n, m)$$

$$3. \text{ אם } p \text{ ראשוני וגם } p|ab, \text{ אזי } p|a \text{ או } p|b.$$

הוכחת התכונות. 1. קיימים s, t כך ש- $d = sn + tm$. כיוון ש- $e|n, m$, אז הוא מחלק גם את צירוף לינארי שלהם $sn + tm$, ז"א את d .

2. (חלק מתרגיל הבית)

3. אם $p \nmid a$, אז $(p, a) = 1$. לכן קיימים s, t כך ש- $1 = sa + tp$. נכפיל את השוויון האחרון ב- b ונקבל $b = sab + tpb$. ברור כי p מחלק את tpb ומאל (הרי $p|ab$), ולכן p מחלק את sa ומכאן $p|a$. כלומר $p|b$.

□

הגדרה 1.13. בהנתן שני מספרים שלמים n, m הכפולה המשותפת המזערית (כמ"מ, least common multiple) שלהם מוגדרת להיות

$$\text{lcm}(n, m) = \min \{d \in \mathbb{N} : n|d \wedge m|d\}$$

$$\text{לעיתים נסמן } [n, m]. \text{ למשל } [6, 10] = 30 \text{ ו-} [2, 5] = 10.$$

טענה 1.14. תכונות של כמ"מ:

1. אם $m|a$ וגם $n|a$, אז $[n, m]|a$.

2. $n, m = |nm|$. למשל $6, 4 = 12 \cdot 2 = 24 = 6 \cdot 4$.

הוכחת התכונות. 1. יהיו q, r כך ש- $a = q[n, m] + r$ כאשר $0 \leq r < [n, m]$. מהנתון כי $n, m|a$ ולפי הגדרה $[n, m]|n, m$, נובע כי $n, m|r$. אם $r \neq 0$ אז סתירה למינימליות של $[n, m]$. לכן $a = q[n, m]$, כלומר $[n, m]|a$.

2. נראה דרך קלה לחישוב הממ"מ והכמ"מ בעזרת הפירוק של מספר למכפלת גורמים ראשוניים. נניח כי הפירוק הוא

$$n = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\beta_i} = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} p_3^{\beta_3} \dots \quad m = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\alpha_i} = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \dots$$

כאשר $\alpha_i, \beta_i \geq 0$ (והם כמעט תמיד אפס כי המכפלה סופית). כעת צריך להשתכנע כי

$$(n, m) = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)} \quad [n, m] = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\max(\alpha_i, \beta_i)}$$

ומפני שלכל שני מספרים α, β מתקיים $\alpha + \beta = \min(\alpha, \beta) + \max(\alpha, \beta)$, אז $n, m = |nm|$.

□

שאלה 1.15 (לבית). אפשר להגדיר ממ"מ ליותר מזוג מספרים. יהי d הממ"מ של המספרים n_1, \dots, n_k . הראו שקיימים מספרים שלמים s_1, \dots, s_k המקיימים $s_1 n_1 + \dots + s_k n_k = d$. רמז: אינדוקציה על k .

הגדרה 1.16. יהי n מספר טבעי. נאמר כי $a, b \in \mathbb{Z}$ הם שקולים בשארית חלוקה ב- n אם $a \equiv b \pmod{n}$. כלומר קיים $k \in \mathbb{Z}$ כך ש- $a = b + kn$. נסמן יחס זה $a \equiv b \pmod{n}$ ונקרא זאת " a שקול ל- b מודולו n ".

טענה 1.17 (הוכחה לבית). שקילות מודולו n היא יחס שקילות (רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי). כפל וחיבור מודולו n מוגדרים היטב. כלומר אם $a \equiv b, c \equiv d \pmod{n}$, אז $ac \equiv bd \pmod{n}$ וגם $a + c \equiv b + d \pmod{n}$.

צורת רישום 1.18. את אוסף מחלקות השקילות מודולו n מקובל לסמן $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. למשל $\mathbb{Z}_4 = \{[0], [1], [2], [3]\}$. $\{[a] : a \in \mathbb{Z}\}$. בסימון \bar{a} , ולעיתים כאשר ההקשר ברור פשוט a .

תרגיל 1.19. מצאו את הספרה האחרונה של 333^{333} .

פתרון. נשים לב כי $333^{333} = 3^{333} \cdot 111^{333}$ לכן

$$\begin{aligned} 111 &\equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow 111^{333} \equiv 1^{333} \equiv 1 \pmod{10} \\ 3^{333} &= 3^{4 \cdot 83 + 1} = (3^4)^{83} \cdot 3 = 81^{83} \cdot 3 \equiv 1^{83} \cdot 3 \pmod{10} \\ 333^{333} &= 3^{333} \cdot 111^{333} \equiv 3 \pmod{10} \end{aligned}$$

ומכאן שהספרה האחרונה היא 3.

תרגיל 1.20 (אם יש זמן). מצאו $0 \leq x \in \mathbb{Z}$ כך ש- $61x \equiv 1 \pmod{234}$.

פתרון. לפי הנתון, קיים $k \in \mathbb{Z}$ כך ש- $61x + 234k \equiv 1$. ז"א 1 הוא צירוף לינארי (מינימלי במקרה זה) של 61 ו-234. לפי איפיון ממ"מ קיבלנו כי $(234, 61) = 1$. כלומר k, x הם המקדמים מן המשפט של איפיון הממ"מ כצירוף לינארי מזערי. לפי תרגיל קודם $1 = 6 \cdot 234 - 23 \cdot 61$. לכן $x \equiv -23 \pmod{234}$, וכדי להבטיח כי x אינו שלילי נבחר $x = 211$.

משפט 1.21 (משפט השאריות הסיני). אם n, m זרים, אזי לכל $a, b \in \mathbb{Z}$ קיים x יחיד עד כדי שקילות מודולו nm כך ש- $x \equiv a \pmod{n}$, $x \equiv b \pmod{m}$ (יחד!).

הוכחה לא מלאה. מפני ש- $(n, m) = 1$, אזי קיימים $s, t \in \mathbb{Z}$ כך ש- $sn + tm = 1$. כדי להוכיח קיום של x כמו במשפט נתבונן ב- $bsn + atm$. מתקיים

$$\begin{aligned} bsn + atm &\equiv atm \equiv a \cdot 1 \equiv a \pmod{n} \\ bsn + atm &\equiv bsn \equiv b \cdot 1 \equiv b \pmod{m} \end{aligned}$$

ולכן $x = bsn + atm$ הוא פתרון אפשרי. ברור כי גם $x' = x + kmn$ לכל $k \in \mathbb{Z}$ הוא פתרון תקף.

□ הוכחת היחידות של x מודולו nm תהיה בתרגיל הבית.

דוגמה 1.22. נמצא $x \in \mathbb{Z}$ כך ש- $x \equiv 1 \pmod{3}$ וגם $x \equiv 2 \pmod{5}$. ידוע כי $(5, 3) = 1$, ולכן $-1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 1$. במקרה זה $n = 5, m = 3$ וכן $s = -1, t = 2$. ולפי משפט השאריות הסיני אפשר לבחור את $x = 1 \cdot (-5) + 2 \cdot 6 = 7$. אכן מתקיים $7 \equiv 2 \pmod{5}$ וגם $7 \equiv 1 \pmod{3}$.

משפט השאריות הסיני הוא יותר כללי. הנה גרסה שלו למערכת משוואות של שקילות מודולו:

משפט 1.23 (אם יש זמן). תהא $\{m_1, \dots, m_k\}$ קבוצת מספרים טבעיים הזרים זה לזה (כלומר כל זוג מספרים בקבוצה הוא זר). נסמן את מכפלתם ב- m . בהנתן קבוצה כלשהי של שאריות $\{a_i \pmod{m_i} : 1 \leq i \leq k\}$, קיימת שארית יחידה x מודולו m המהווה פתרון למערכת המשוואות

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ \vdots \\ x \equiv a_k \pmod{m_k} \end{cases}$$

דוגמה 1.24. נמצא $y \in \mathbb{Z}$ כך ש- $y \equiv 1 \pmod{3}$, $y \equiv 2 \pmod{5}$ וגם $y \equiv 3 \pmod{7}$. נשים לב שהפתרון $y = 7$ מן הדוגמה הקודמת הוא נכון כדי כדי הוספה של $3 \cdot 5 = 15$ (כי $15 \equiv 0 \pmod{3}$ וגם $15 \equiv 0 \pmod{5}$). לכן את שתי המשוואות $y \equiv 1 \pmod{3}$, $y \equiv 2 \pmod{5}$ ניתן להחליף במשוואה אחת $y \equiv 7 \pmod{15}$. נשים לב כי $(15, 7) = 1$ ולכן אפשר להשתמש במשפט השאריות הסיני בגרסה לזוג משוואות. בדקו כי $y = 52$ מהווה פתרון.

2 מבנים אלגבריים בסיסיים

בהתאם לשם הקורס, כעת נכיר כמה מבנים אלגבריים. מבנה אלגברי שמכירים כבר באלגברה לינארית הוא שדה. אנו נגדיר כמה מבנים יותר "פשוטים", כשהחשוב שבהם הוא חבורה. במרבית הקורס נתרכז בחקר חבורות.

הגדרה 2.1. תהי S קבוצה. פעולה בינארית (binary operation) על S היא פונקציה דו-מקומית $S \times S \rightarrow S$: $*$. עבור $a, b \in S$ כמעט תמיד במקום לרשום $*(a, b)$ נשתמש בסימון $a * b$. מפני שתמונת הפונקציה $a * b$ שייכת ל- S , נאמר כי הפעולה היא סגורה.

הגדרה 2.2. אגודה (או חבורה למחצה, semigroup) היא מערכת אלגברית $(S, *)$ המורכבת מקבוצה לא ריקה S ומפעולה בינארית על S המקיימת קיבוציות (אסוציאטיביות, associativity). כלומר לכל $a, b, c \in S$ מתקיים $(a * b) * c = a * (b * c)$.

דוגמה 2.3. המערכת $(\mathbb{N}, +)$ של מספרים טבעיים עם החיבור הרגיל היא אגודה.

דוגמה 2.4. המערכת $(\mathbb{Z}, -)$ אינה אגודה, מפני שפעולת החיסור אינה קיבוצית. למשל $(5 - 2) - 1 \neq 5 - (2 - 1)$.

צורת רישום 2.5. לעיתים נקצר ונאמר כי S היא אגודה מבלי להזכיר במפורש את המערכת האלגברית. במקרים רבים הפעולה תסומן כמו כפל, דהיינו ab או $a \cdot b$, ובמקום לרשום מכפלה $aa \dots a$ של n פעמים a נרשום a^n .

הגדרה 2.6. תהי $(S, *)$ אגודה. איבר $e \in S$ נקרא איבר יחידה אם לכל $a \in S$ מתקיים $a * e = e * a = a$.

הגדרה 2.7. מונואיד (monoid, או יחידון) $(M, *, e)$ הוא אגודה בעלת איבר יחידה e . כאשר הפעולה ואיבר היחידה ברורים מן ההקשר, פשוט נאמר כי M הוא מונואיד.

הערה 2.8 (בהרצאה). יהי $(M, *, e)$ מונואיד עם איבר יחידה e . הוכיחו כי איבר היחידה הוא יחיד. הרי אם $e, f \in M$ הם איברי יחידה, אז מתקיים $e = e * f = f$.

הגדרה 2.9. יהי $(M, *, e)$ מונואיד. איבר $a \in M$ יקרא הפיך משמאל אם קיים איבר $b \in M$ כך ש- $ba = e$. במקרה זה b יקרא הופכי שמאלי של a . באופן דומה, איבר $a \in M$ יקרא הפיך מימין אם קיים איבר $b \in M$ כך ש- $ab = e$. במקרה זה b יקרא הופכי ימני של a . איבר יקרא הפיך אם קיים איבר $b \in M$ כך ש- $ba = ab = e$. במקרה זה b יקרא הופכי של a .

תרגיל 2.10 (בהרצאה). יהי $a \in M$ איבר הפיך משמאל ומימין. הראו ש- a הפיך וההופכי שלו הוא יחיד.

פתרון. יהי b הופכי שמאלי כלשהו של a (קיים כזה כי a הפיך משמאל), ויהי c הופכי ימני כלשהו של a (הצדקה דומה). נראה כי $b = c$ ונסיק שאיבר זה הוא הופכי של a . ודאו כי אתם יודעים להצדיק כל אחד מן המעברים הבאים:

$$c = e * c = (b * a) * c = b * (a * c) = b * e = b$$

לכן כל ההופכיים הימיניים וכל ההופכיים השמאליים של a שווים זה לזה. מכאן גם שההופכי הוא יחיד, ויסומן a^{-1} . שימו לב שאם איבר הוא רק הפיך מימין ולא משמאל, אזי יתכן שיש לו יותר מהופכי ימני אחד (וכנ"ל בהיפוך הכיוונים)!

הגדרה 2.11 חבורה (group) $(G, *, e)$ היא מונואיד שבו כל איבר הוא הפיך.

לפי ההגדרה לעיל על מנת להוכיח שמערכת אלגברית $(G, *)$ היא חבורה צריך להראות כי הפעולה $*$ היא סגורה, קיבוצית, שקיים איבר יחידה ושכל איבר הוא הפיך. כמו כן מתקיים: חבורה \Leftarrow מונואיד \Leftarrow אגודה.

דוגמה 2.12 המערכת $(\mathbb{Z}, +)$ היא חבורה שאיבר היחידה בה הוא 0. בכתוב חיבורי מקובל לסמן את האיבר ההופכי של a בסיומן $-a$. כתיב זה מתלכד עם המושג המוכר של מספר נגדי ביחס לחיבור.

דוגמה 2.13 יהי F שדה (למשל \mathbb{Q}, \mathbb{R} או \mathbb{C}). אזי $(F, +, 0)$ עם פעולת החיבור של השדה היא חבורה. באופן דומה גם $(M_{n,m}(F), +)$ (אוסף המטריצות בגודל $n \times m$ מעל F) עם פעולת חיבור מטריצות היא חבורה. איבר היחידה הוא מטריצת האפס.

דוגמה 2.14 יהי F שדה. המערכת (F, \cdot) עם פעולת הכפל של השדה היא מונואיד שאינו חבורה (מי לא הפיך?). איבר היחידה הוא 1.

דוגמה 2.15 יהי F שדה. נסמן $F^* = F \setminus \{0\}$. אזי $(F^*, \cdot, 1)$ היא חבורה. לעומת זאת, המערכת (\mathbb{Z}^*, \cdot) עם הכפל הרגיל של מספרים שלמים היא רק מונואיד (מי הם האיברים ההפיכים בו?).

דוגמה 2.16 קבוצה בעלת איבר אחד ופעולה סגורה היא חבורה. לחבורה זו קוראים החבורה הטריוויאלית.

הגדרה 2.17 (חבורת האיברים ההפיכים). יהי M מונואיד ויהיו $a, b \in M$ זוג איברים. אם a, b הם הפיכים, אזי גם $a \cdot b$ הוא הפיך במונואיד. אכן, האיבר ההופכי הוא $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$. לכן אוסף כל האיברים ההפיכים במונואיד מהווה קבוצה סגורה ביחס לפעולה. כמו כן האוסף הנ"ל מכיל את איבר היחידה, וכל איבר בו הוא הפיך. מסקנה מיידית היא שאוסף האיברים ההפיכים במונואיד מהווה חבורה ביחס לפעולה המצומצמת. נסמן חבורה זו ב- $U(M)$ (קיצור של Units).

הגדרה 2.18. המערכת $(M_n(\mathbb{R}), \cdot)$ של מטריצות ממשיות בגודל $n \times n$ עם כפל מטריצות היא מונואיד. לחבורת ההפיכים שלו

$$U(M_n(\mathbb{R})) = GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$$

קוראים החבורה הלינארית הכללית (ממעלה n) מעל \mathbb{R} (General Linear group).

הגדרה 2.19. נאמר כי פעולה דו-מקומית $\cdot : G \times G \rightarrow G$ היא אבלית (או חילופית, commutative) אם לכל שני איברים $a, b \in G$ מתקיים $a * b = b * a$. אם $(G, *)$ חבורה והפעולה היא אבלית, נאמר כי G היא חבורה אבלית (או חילופית). המושג נקרא על שמו של נילס הנריק אָבֶל (Niels Henrik Abel).

דוגמה 2.20. יהי F שדה. החבורה $(GL_n(F), \cdot)$ אינה אבלית עבור $n > 1$.

דוגמה 2.21. מרחב וקטורי V יחד עם פעולת חיבור וקטורים הרגילה הוא חבורה אבלית.

הערה 2.22. עבור קבוצה סופית אפשר להגדיר פעולה בעזרת לוח כפל. למשל, אם $S = \{a, b\}$ ונגדיר

$*$	a	b
a	a	a
b	b	b

אזי $(S, *)$ היא אגודה כי הפעולה קיבוצית, אך היא אינה מונואיד כי אין בה איבר יחידה. נשים לב שהיא לא חילופית כי $a * b = a$, אבל $b * a = b$. בבית תתבקשו למצוא לוחות כפל עבור S כך שיתקבל מונואיד שאינו חבורה, שתתקבל חבורה וכו'.

הערה 2.23 (אם יש זמן). בקורס באלגברה לינארית כנראה ראיתם הגדרה של שדה $(F, +, \cdot, 0, 1)$ הכוללת רשימה ארוכה של דרישות. בעזרת ההגדרות שראינו נוכל לקצר אותה. נסמן $F^* = F \setminus \{0\}$. נאמר כי F הוא שדה אם $(F, +, 0)$ היא חבורה חילופית, $(F^*, \cdot, 1)$ היא חבורה חילופית וקיום חוק הפילוג (distributive law), לכל $a, b, c \in F$ מתקיים $a(b + c) = ab + ac$.

תרגיל 2.24. האם קיים מונואיד שיש בו איבר הפיך מימין שאינו הפיך משמאל?

פתרון. כן. נבנה מונואיד כזה. תהא X קבוצה. נסתכל על קבוצת ההעתקות מ- X לעצמה המסומנת $X^X = \{f : X \rightarrow X\}$. ביחס לפעולת ההרכבה זהו מונואיד, ואיבר היחידה בו הוא העתקת הזהות.

ההפיכים משמאל הם הפונקציות החח"ע. ההפיכים מימין הם הפונקציות על (להזכיר את הטענות הרלוונטיות מבדידה). מה יקרה אם נבחר את X להיות סופית? (לעתיד: לחבורה $U(X^X, \circ)$ קוראים חבורת הסימטריה על X ומסמנים S_X . אם $X = \{1, \dots, n\}$ מקובל לסמן את חבורת הסימטריה שלה בסימון S_n , ולכן כל איבר הפיך משמאל. עבור $n \geq 3$ זו חבורה לא אבלית.)

אם ניקח למשל $X = \mathbb{N}$ קל למצוא פונקציה על שאינה חח"ע. הפונקציה שנבחר היא $d(n) = \max(1, n - 1)$. לפונקציה זו יש הופכי מימין, למשל $u(n) = n + 1$, אבל אין לה הפיך משמאל.

צורת רישום 2.25. יהי n מספר טבעי. נסמן את הכפולות שלו ב- $n\mathbb{Z} = \{0, \pm n, \pm 2n, \dots\}$. למשל $4\mathbb{Z} = \{\dots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \dots\}$.

דוגמה 2.26. נסתכל על אוסף מחלקות השקילות מודולו n , $\mathbb{Z}_n = \{[a] : a \in \mathbb{Z}\}$. כזכור חיבור וכפל מודולו n מוגדר היטב. למשל $[a] + [b] = [a + b]$ כאשר באגף שמאל הסימן $+$ הוא פעולה בינארית הפועלת על אוסף מחלקות השקילות (a הוא נציג של מחלקת שקילות אחת ו- b הוא נציג של מחלקת שקילות אחרת) ובאגף ימין זו פעולת החיבור הרגילה של מספרים (שלאחריה מסתכלים על מחלקת השקילות שבה $a + b$ נמצא).

אפשר לראות כי $(\mathbb{Z}_n, +)$ היא חבורה אבלית. נבחר נציגים למחלקות השקילות $\{[0], [1], \dots, [n-1]\}$. $\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], \dots, [n-1]\}$. איבר היחידה הוא $[0]$ (הרי $[0] + [a] = [0 + a] = [a]$) לכל $[a]$). קיבוציות הפעולה והאבליות נובעת מקיבוציות והאבליות של פעולת החיבור הרגילה. האיבר ההופכי של $[a]$ הוא $[n-a]$.

מה ניתן לומר לגבי (\mathbb{Z}_n, \cdot) ? ישנה סגירות, ישנה קיבוציות וישנו איבר יחידה $[1]$. אך זו לא חבורה כי ל- $[0]$ אין הופכי. נסמן $\mathbb{Z}_n^* = \mathbb{Z}_n \setminus \{[0]\}$. האם (\mathbb{Z}_n^*, \cdot) חבורה? לא בהכרח. למשל עבור \mathbb{Z}_6^* נקבל כי $[2][3] = [6] = [0]$. לפי ההגדרה $[0] \notin \mathbb{Z}_6^*$, ולכן (\mathbb{Z}_n^*, \cdot) אינה סגורה (כלומר אפילו לא אגודה).

דוגמה 2.27. עדין ניתן להציל את המקרה של הכפל מודולו n . נגדיר את חבורת אוילר (Euler) להיות $U_n = U(\mathbb{Z}_n)$ לגבי פעולת הכפל. נבנה את לוח הכפל של \mathbb{Z}_6 (בהתעלם מ- $[0]$ שתמיד יתן במכפלה $[0]$):

\cdot	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	0	2	4
3	3	0	3	0	3
4	4	2	0	4	2
5	5	4	3	2	1

האיברים ההפיכים הם אלו שמופיע עבורם 1 (הפעולה חילופית ולכן מספיק לבדוק רק עמודות או רק שורות). כלומר $U_6 = \{[1], [5]\}$. במקרה זה $[5]$ הוא ההופכי של עצמו.

הערה 2.28. אם p הוא מספר ראשוני, אז $U_p = \mathbb{Z}_p^*$ (למה?).

טענה 2.29 (הוכחה לבית). בדומה להערה האחרונה, נאפיין את האיברים ב- U_n . יהי $m \in \mathbb{Z}$ או $[m] \in U_n$ אם ורק אם $(n, m) = 1$. כלומר, ההפיכים במונואיד (\mathbb{Z}_n, \cdot) הם כל האיברים הזרים ל- n .

דוגמה 2.30. $U_{12} = \{1, 5, 7, 11\}$.

דוגמה 2.31. לא קיים ל-5 הופכי כפלי ב- \mathbb{Z}_{10} , שכן אחרת 5 היה זר ל-10 וזו סתירה.

3 תתי-חבורות, סדר של איבר וסדר של חבורה

טענה 3.1 (מההרצאה). יהי $m \in \mathbb{Z}$ או $[m] \in U_n$ אם ורק אם $(n, m) = 1$. כלומר, ההפיכים במונואיד (\mathbb{Z}_n, \cdot) הם כל האיברים הזרים ל- n .

תתי-חבורות

3.2 הגדרה תהי G חבורה. תת-קבוצה $H \subseteq G$ היא תת-חבורה, אם היא מהווה חבורה ביחס לפעולה המושרית מ- G .

3.3 דוגמה לכל חבורה G יש שתי תתי-חבורות באופן מיידי: $\{e\} \leq G$ (הנקראת תת-החבורה הטריוויאלית), ו- $G \leq G$.

3.4 דוגמה לכל $n \in \mathbb{Z}$, $n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$. בהמשך נוכיח שאלו כל תתי-החבורות של \mathbb{Z} .

3.5 דוגמה (בתרגיל). $m\mathbb{Z} \leq n\mathbb{Z}$ אם ורק אם $n|m$.

3.6 דוגמה $(\mathbb{Z}_n, +)$ אינה תת-חבורה של $(\mathbb{Z}, +)$ - כי \mathbb{Z}_n אינה מוכלת ב- \mathbb{Z} : האיברים ב- \mathbb{Z}_n הם מחלקות שקילות, ואילו האיברים ב- \mathbb{Z} הם מספרים.

3.7 דוגמה U_n אינה תת-חבורה כפלית של (\mathbb{Z}_n, \cdot) - כי (\mathbb{Z}_n, \cdot) אינה חבורה.

3.8 דוגמה $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$ אינה תת-חבורה של $(M_n(\mathbb{R}), +)$ - כי הפעולות בהן שונות.

טענה 3.9 (קריטריון מקוצר לתת-חבורה - מההרצאה). תהי $H \subseteq G$ תת-קבוצה. אזי H תת-חבורה של G אם ורק אם שני התנאים הבאים מתקיימים:

$$1. e \in H$$

$$2. \text{ לכל } h_1, h_2 \in H \text{ גם } h_1 \cdot h_2^{-1} \in H$$

3.10 תרגיל יהי F שדה. נגדיר

$$SL_n(F) = \{A \in GL_n(F) \mid \det A = 1\}$$

הוכיחו כי $SL_n(F) \leq GL_n(F)$ היא תת-חבורה. קוראים לה החבורה הלינארית המיוחדת מדרגה n .

הוכחה. ניעזר בקריטריון המקוצר לתת-חבורה.

$$1. \text{ ברור כי } I_n \in SL_n(F) \text{, כי } \det I_n = 1$$

$$2. \text{ נניח } A, B \in SL_n(F) \text{, צ"ל } AB^{-1} \in SL_n(F) \text{, אכן,}$$

$$\det(AB^{-1}) = \det A \det B^{-1} = \frac{\det A}{\det B} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{ולכן } AB^{-1} \in SL_n(F)$$

לפי הקריטריון המקוצר, $SL_n(F)$ היא תת-חבורה של $GL_n(F)$.

□

סדר של איבר וסדר של חבורה

הגדרה 3.11. תהי G חבורה. נגדיר את הסדר (order) של G להיות עוצמתה כקבוצה. במילים יותר גשמיות, כמה איברים יש בחבורה. סימונים מקובלים: $|G|$ או $\text{Ord}(G)$.

צורת רישום 3.12. בחבורה כפלית נסמן את החזקה החיובית $a^n = aa \dots a$ לכפל n פעמים. בחבורה חיבורית נסמן $na = a + \dots + a$. חזקות שליליות הן חזקות חיוביות של ההופכי של a . מוסכם כי $a^0 = e$.

הגדרה 3.13. תהי (G, \cdot, e) חבורה ויהא איבר $g \in G$. הסדר של איבר הוא המספר הטבעי n הקטן ביותר כך שמתקיים $g^n = e$. אם אין n כזה, אומרים שהסדר של g הוא אינסוף. בפרט, בכל חבורה הסדר של איבר היחידה הוא 1, וזהו האיבר היחיד מסדר 1. סימון מקובל $o(g) = n$ ולפעמים $|g|$.

דוגמה 3.14. בחבורה $(\mathbb{Z}_6, +)$, $o(2) = 3$, $o(4) = 3$, $o(3) = 2$, $o(5) = 6$, $o(1) = 6$.

דוגמה 3.15. נסתכל על החבורה (U_{10}, \cdot) . נזכור כי $U_{10} = \{1, 3, 7, 9\}$ (כי אלו המספרים הזרים ל-10 וקטנים ממנו). נחשב את $o(7)$:

$$\begin{aligned} 7^2 &= 49 \equiv 9 \pmod{10} \\ 7^3 &= 7 \cdot 7^2 \equiv 7 \cdot 9 = 63 \equiv 3 \pmod{10} \\ 7^4 &= 7 \cdot 7^3 = 7 \cdot 3 = 21 \equiv 1 \pmod{10} \end{aligned}$$

ולכן $o(7) = 4$.

דוגמה 3.16. נסתכל על $(GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$ - חבורת המטריצות ההפיכות מגודל 2×2 מעל \mathbb{R} . נחשב את הסדר של $b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} b^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq I \\ b^3 &= b \cdot b^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \end{aligned}$$

לכן $o(b) = 3$.

תרגיל 3.17. תהי G חבורה. הוכיחו שלכל $a \in G$, $o(a) = o(a^{-1})$.

הוכחה. נחלק לשני מקרים:

מקרה 1. נניח $o(a) = n < \infty$. לכן $a^n = e$. ראשית,

$$e = e^n = (a^{-1}a)^n = (a^{-1})^n a^n = (a^{-1})^n e = (a^{-1})^n$$

כאשר המעבר \star מבוסס על כך ש- a ו- a^{-1} מתחלפים (באופן כללי, $(ab)^n \neq a^n b^n$). הוכחנו ש- $(a^{-1})^n = e$, ולכן $o(a^{-1}) \leq n = o(a)$. כעת, צריך להוכיח את אי-השוויון השני. אם נחליף את a ב- a^{-1} , נקבל $o(a) = o((a^{-1})^{-1}) < o(a^{-1})$. לכן יש שוויון.

מקרה 2. נניח $o(a) = \infty$, ונניח בשלילה $o(a^{-1}) < \infty$. לפי המקרה הראשון, $o(a) = o(a^{-1}) < \infty$, וקיבלנו סתירה. לכן $o(a^{-1}) < \infty$.

□

הגדרה 3.18. תהי G חבורה, ויהי $a \in G$. תת-החבורה הנוצרת על ידי a היא תת-החבורה

$$\langle a \rangle = \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

דוגמה 3.19. עבור $n \in \mathbb{Z}$, $n\mathbb{Z} = \{kn \mid k \in \mathbb{Z}\} = \langle n \rangle$.

הגדרה 3.20. תהי G חבורה ויהי איבר $a \in G$. אם $G = \langle a \rangle$, אזי נאמר כי G נוצרת על ידי a ונקרא ל- G חבורה ציקלית (מעגלית).

דוגמה 3.21. החבורה $(\mathbb{Z}, +)$ נוצרת על ידי 1, שכן כל מספר ניתן להצגה ככפולה (כחזקה) של 1. שימו לב כי יוצר של חבורה ציקלית לא חייב להיות יחיד, למשל גם -1 יוצר את \mathbb{Z} החיבורית.

דוגמה 3.22. החבורה $(\mathbb{Z}_n, +) = \langle 1 \rangle$ היא ציקלית. וודאו כי בחבורה $(\mathbb{Z}_2, +)$ יש רק יוצר אחד (נניח על ידי טבלת כפל). וודאו כי בחבורה $(\mathbb{Z}_{10}, +)$ יש ארבעה יוצרים. שניים די ברורים (1 וגם $9 \equiv -1$), האחרים (3, 7) דורשים לבינתיים בדיקה ידנית.

הערה 3.23. יהי $a \in G$. אזי $o(a) = |\langle a \rangle|$. במילים, הסדר של איבר הוא גודל תת-החבורה שהוא יוצר.

טענה 3.24. שימו לב כי הסדר של יוצר בחבורה ציקלית הוא סדר החבורה. כלומר אנחנו יודעים כי $5 \in (\mathbb{Z}_{10}, +)$ אינו יוצר כי הסדר שלו הוא $|\mathbb{Z}_{10}| = 10 > 2 = |5|$, שהרי $5 + 5 \equiv 0 \pmod{10}$.

טענה 3.25. כל חבורה ציקלית היא אבלית.

הוכחה. תהי G חבורה ציקלית, ונניח כי $G = \langle a \rangle$. יהיו $g_1, g_2 \in G$. צ"ל $g_1 g_2 = g_2 g_1$. מכאן שמתקיים

$$g_1 g_2 = a^i a^j = a^{i+j} = a^{j+i} = a^j a^i = g_2 g_1$$

□

דוגמה 3.26. לא כל חבורה אבלית היא ציקלית. למשל, נסתכל על $U_8 = \{1, 3, 5, 7\}$ זו לא חבורה ציקלית, כי אין בחבורה הזו איבר מסדר 4 (כל האיברים שאינם 1 הם מסדר 2 – בדקו).

דוגמה 3.27. קבוצת שורשי היחידה מסדר n מעל \mathbb{C} היא

$$\Omega_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} = \left\{ \text{cis} \frac{2\pi k}{n} \mid k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}$$

זו תת-חבורה של \mathbb{C}^* . יותר מכך: אם נסמן $\omega_n = \text{cis} \frac{2\pi}{n}$, נקבל $\Omega_n = \langle \omega_n \rangle$, כלומר Ω_n היא חבורה ציקלית.

טענה 3.28. הוכיחו: אם G ציקלית, אז כל תת-חבורה של G היא ציקלית.

הוכחה. תהי $H \leq G$ תת-חבורה. נסמן $G = \langle a \rangle$. כל האיברים ב- G הם מהצורה a^i , ולכן גם כל האיברים ב- H הם מהצורה הזו.
יהי $s \in \mathbb{N}$ המספר המינימלי שעבורו $a^s \in H$. נרצה להוכיח $H = \langle a^s \rangle$. אכן, יהי $k \in \mathbb{N}$ שעבורו $a^k \in H$. לפי משפט החילוק עם שארית, קיימים q ו- r שעבורם $0 \leq r < s, k = qs + r$, לכן,

$$a^k = a^{qs+r} = a^{qs} \cdot a^r = (a^s)^q \cdot a^r$$

במילים אחרות, $a^r = a^k \cdot (a^s)^{-q}$. אבל $a^s, a^k \in H$ ולכן גם $a^r \in H$ (סגירות לכפל ולהופכי).

אם $r \neq 0$, קיבלנו סתירה למינימליות של s - כי $a^r \in H$ וגם $0 < r < s$ (לפי בחירת r). לכן, $r = 0$. כלומר, $k = qs$, ומכאן $s | k$. לכן $a^k \in \langle a^s \rangle$, כדרוש. \square

מסקנה 3.29. תתי-החבורות של $(\mathbb{Z}, +)$ הן בדיוק $(n\mathbb{Z}, +)$ עבור $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

טענה 3.30 (מההרצאה). תהי G חבורה, ויהי $a \in G$. אם $a^n = e$, אזי $o(a) | n$.

תרגיל 3.31. תהי G חבורה, ויהי $a \in G$. נניח $o(a) = n < \infty$. הוכיחו שלכל $d \leq n$ טבעי,

$$o(a^d) = \frac{n}{(d, n)} = \frac{o(a)}{(d, o(a))}$$

הוכחה. היתכנות: נשים לב כי

$$(a^d)^{\frac{n}{(d, n)}} = (a^n)^{\frac{d}{(d, n)}} = e$$

(הפעולות שעשינו חוקיות, כי $\frac{d}{(d, n)} \in \mathbb{Z}$).

מינימליות: נניח $(a^d)^t = e$, כלומר $a^{dt} = e$. לפי טענה 3.30, $n | dt$. לכן, גם

$$\frac{n}{(d, n)} \Big| \frac{dt}{(d, n)} \quad (\text{שניהם מספרים שלמים - מדוע?}). \quad \text{מצד שני,} \quad \left(\frac{n}{(d, n)}, \frac{d}{(d, n)} \right) = 1$$

לפי תרגיל שהוכחנו בתרגול הראשון, $\frac{n}{(d, n)} | t$, כמו שרצינו. \square

תרגיל 3.32 (אם יש זמן). נגדיר $\Omega_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$. הוכיחו:

1. Ω_∞ היא תת-חבורה של \mathbb{C}^* .

2. לכל $x \in \Omega_\infty, o(x) < \infty$ (כלומר: כל איבר ב- Ω_∞ הוא מסדר סופי).

3. Ω_∞ אינה ציקלית.

לחבורה כזו, שבה כל איבר הוא מסדר סופי, קוראים חבורה מפותלת.

פתרון.

1. ניעזר בקריטריון המקוצר. יהיו $g_1, g_2 \in \Omega_\infty$. לכן קיימים m, n שעבורם $g_1 \in \Omega_m, \Omega_n$. נכתוב

$$g_1 = \text{cis} \frac{2\pi k}{m}, \quad g_2 = \text{cis} \frac{2\pi \ell}{n}$$

לכן

$$\begin{aligned} g_1 g_2^{-1} &= \text{cis} \frac{2\pi k}{m} \left(\text{cis} \frac{2\pi \ell}{n} \right)^{-1} = \text{cis} \frac{2\pi k}{m} \text{cis} \left(-\frac{2\pi \ell}{n} \right) = \text{cis} \left(\frac{2\pi k}{m} - \frac{2\pi \ell}{n} \right) = \\ &= \text{cis} \left(\frac{2\pi (kn - \ell m)}{mn} \right) \in \Omega_{mn} \subseteq \Omega_\infty \end{aligned}$$

2. לכל $x \in \Omega_\infty$ קיים n שעבורו $x \in \Omega_n$; לכן, $o(x) \leq n$.

3. נניח בשלילה $\Omega_\infty = \langle a \rangle$; לכן בהכרח $o(a) = |\Omega_\infty| = \aleph_0$. אבל זה סותר את תוצאת סעיף ב'.

תרגיל 3.33 (אם יש זמן). תהי G חבורה ציקלית מסדר n . כמה איברים ב- G יוצרים את G ?

פתרון. נניח כי $G = \langle a \rangle$. אזי

$$G = \langle a^k \rangle \iff o(a^k) = n \iff \frac{n}{(k, n)} = n \iff (k, n) = 1$$

לכן, מספר האיברים היוצרים את G הוא $|U_n|$.

4 מכפלה של חבורות והחבורה הסימטרית

מכפלה קרטזית של חבורות

הגדרה 4.1. תהיינה $(G, *)$ ו- (H, \bullet) חבורות. ניזכר ממתמטיקה בדידה כי

$$G \times H = \{(g, h) | g \in G, h \in H\}$$

נגדיר פעולה על $G \times H$ רכיב-רכיב, כלומר:

$$(g_1, h_1) \odot (g_2, h_2) = (g_1 * g_2, h_1 \bullet h_2)$$

טענה 4.2. $(G \times H, \odot)$ היא חבורה.

למשל, האיבר הניטרלי ב- $G \times H$ הוא (e_G, e_H) .

דוגמה 4.3. נסתכל על $U_8 \times \mathbb{Z}_3$. נדגים את הפעולה:

$$(3, 2) \odot (5, 2) = (3 \cdot 5, 2 + 2) = (15, 4) = (7, 1)$$

$$(5, 1) \odot (7, 2) = (5 \cdot 7, 1 + 2) = (35, 3) = (3, 0)$$

האיבר הניטרלי הוא $(1, 0)$.

תרגיל 4.4. האם $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ ציקלית (עבור $n \geq 2$)?

פתרון. לא! נוכיח שהסדר של כל איבר $(a, b) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ הוא לכל היותר n : אכן,

$$(a, b)^n = (a, b) \odot (a, b) \odot \dots \odot (a, b) = (a + a + \dots + a, b + b + \dots + b) = (na, nb) = (0, 0)$$

כיוון שהסדר הוא המספר המינימלי m שעבורו $(a, b)^m = (0, 0)$, בהכרח $m \leq n$. כלומר, הסדר של כל איבר ב- $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ הוא לכל היותר n .

כעת, נסיק כי החבורה הזו אינה ציקלית: כזכור מבדידה, $|\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n| = n^2$. אילו החבורה $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ הייתה ציקלית, היה בה איבר מסדר n^2 ; אך אין כזה, ולכן החבורה אינה ציקלית.

הערה 4.5. התרגיל הקודם אומר שמכפלה של חבורות ציקליות אינה בהכרח ציקלית. לעומת זאת, מכפלה של חבורות אבליות תישאר אבליית (תוכיחו בבית).

הערה 4.6. מעכשיו, במקום לסמן את הפעולה של $G \times H$ ב- \odot , נסמן אותה ב- \cdot בשביל הנוחות.

החבורה הסימטרית (על קצה המזלג)

הגדרה 4.7. החבורה הסימטרית מדרגה n היא

$$S_n = \{\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\} \mid \sigma \text{ is bijective}\}$$

זהו אוסף כל ההעתקות החח"ע ועל מהקבוצה $\{1, 2, \dots, n\}$ לעצמה, ובמילים אחרות – אוסף כל שינויי הסדר של המספרים $\{1, 2, \dots, n\}$. S_n היא חבורה, כאשר הפעולה היא הרכבת פונקציות. איבר היחידה הוא פונקציית הזהות. כל איבר של S_n נקרא תמורה.

הערה 4.8 (אם יש זמן). החבורה S_n היא בדיוק חבורת ההפיכים במונואיד X^X עם פעולת ההרכבה, כאשר $X = \{1, 2, \dots, n\}$.

דוגמה 4.9. ניקח לדוגמה את S_3 . איבר $\sigma \in S_3$ הוא מהצורה $\sigma(1) = i, \sigma(2) = j, \sigma(3) = k-1$, כאשר $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ שונים זה מזה. נסמן בקיצור

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}$$

נכתוב במפורש את האיברים ב- S_3 :

$$.1 \text{ id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$.2 \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$.3 \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$.4 \sigma^2 = \sigma \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$.5 \sigma\tau = \sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$.6 \tau\sigma = \tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

נשים לב ש- S_3 אינה אבלית, כי $\sigma\tau \neq \tau\sigma$.

הערה 4.10. נשים לב כי $|S_n| = n!$. אכן, מספר האפשרויות לבחור את $\sigma(1)$ הוא n ; אחר כך, מספר האפשרויות לבחור את $\sigma(2)$ הוא $n-1$; כך ממשיכים, עד שמספר האפשרויות לבחור את $\sigma(n)$ הוא 1 - האיבר האחרון שלא בחרנו. בסך הכל, $|S_n| = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 = n!$.

הגדרה 4.11. מחזור (או עגיל) ב- S_n הוא תמורה המציינת מעגל אחד של החלפות של מספרים שונים: $a_1 \mapsto a_2 \mapsto a_3 \mapsto \dots \mapsto a_k \mapsto a_1$ (ושאר המספרים נשלחים לעצמם). כותבים את התמורה הזו בקיצור $(a_1 a_2 \dots a_k)$. האורך של המחזור $(a_1 a_2 \dots a_k)$ הוא k .

דוגמה 4.12. ב- S_5 , המחזור $(4 5 2)$ מציין את התמורה $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

משפט 4.13. כל תמורה ניתנת לכתיבה באופן יחיד כהרכבת מחזורים זרים, כאשר הכוונה ב"מחזורים זרים" היא מחזורים שאין לאף זוג מהם איבר משותף.

הערה 4.14. שימו לב שמחזורים זרים מתחלפים זה עם זה (מדוע?), ולכן חישובים עם מחזורים יהיו לעיתים קלים יותר מאשר חישובים עם התמורה עצמה.

דוגמה 4.15. נסתכל על התמורה הבאה ב- S_7 : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 3 & 1 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$. כדי לכתוב אותה כמכפלת מחזורים זרים, לוקחים מספר, ומתחילים לעבור על המחזור המתחיל בו. למשל:

$$1 \mapsto 4 \mapsto 1$$

אז בכתיבה על ידי מחזורים יהיה לנו את המחזור $(1\ 4)$. כעת ממשיכים כך, ומתחילים ממספר אחר:

$$2 \mapsto 7 \mapsto 6 \mapsto 2$$

אז נקבל את המחזור $(2\ 7\ 6)$ בכתיבה. נשים לב ששאר המספרים הולכים לעצמם, כלומר $3 \mapsto 3, 5 \mapsto 5$, ולכן

$$\sigma = (1\ 4)(2\ 7\ 6)$$

נחשב את σ^2 . אפשר ללכת לפי ההגדרה, לעבור על כל מספר ולבדוק לאן σ^2 תשלח אותו; אבל, כיוון שמחזורים זרים מתחלפים, נקבל

$$\sigma^2 = ((1\ 4)(2\ 7\ 6))^2 = (1\ 4)^2(2\ 7\ 6)^2 = (2\ 6\ 7)$$

תרגיל 4.16. יהי $\sigma \in S_n$ מחזור מאורך k . מהו $o(\sigma)$?

פתרון. נסמן $\sigma = (a_1\ a_2\ \dots\ a_k)$ נוכיח כי $o(\sigma) = k$. ראשית, ברור כי $\sigma^k = \text{id}$: לכל a_i מתקיים

$$\sigma^k(a_i) = \sigma^{k-1}(a_{i+1}) = \dots = \sigma(a_{i-1}) = a_i$$

ולכל $m \neq a_i$, $\sigma^k(m) = m$ (כי $\sigma^k(m) = m$).

נותר להוכיח מינימליות; אבל אם $\ell < k$, אפשר להשתכנע כי $\sigma^\ell(a_1) = a_{\ell+1} \neq a_1$, כלומר $\sigma^\ell \neq \text{id}$.

5 מחלקות

הגדרה 5.1. תהי G חבורה, ותהי $H \leq G$ תת-חבורה. לכל $g \in G$, נגדיר:

• מחלקה שמאלית - $gH = \{gh | h \in H\} \subseteq G$

• מחלקה ימנית - $Hg = \{hg | h \in H\}$

את אוסף המחלקות השמאליות נסמן G/H .

דוגמה 5.2. ניקח את $G = S_3$, ונסתכל על תת-החבורה

$$H = \langle (1\ 2\ 3) \rangle = \{\text{id}, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

המחלקות השמאליות של H ב- G :

$$\text{id} H = \{\text{id}, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

$$(1\ 2) H = \{(1\ 2), (2\ 3), (1\ 3)\}$$

$$(1\ 3) H = \{(1\ 3), (1\ 2), (2\ 3)\} = (1\ 2) H$$

$$(2\ 3) H = \{(2\ 3), (1\ 3), (1\ 2)\} = (1\ 2) H$$

$$(1\ 2\ 3) H = \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), \text{id}\} = \text{id} H$$

$$(1\ 3\ 2) H = \{(1\ 3\ 2), \text{id}, (1\ 2\ 3)\} = \text{id} H$$

לכן

$$S_3/H = \{\text{id} H, (1\ 2) H\}$$

דוגמה 5.3. ניקח את $G = (\mathbb{Z}, +)$, ונסתכל על המחלקות השמאליות של $H = 5\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} 0 + H &= H = \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots\} \\ 1 + H &= \{\dots, -9, -4, 1, 6, 11, \dots\} \\ 2 + H &= \{\dots, -8, -3, 2, 7, 12, \dots\} \\ 3 + H &= \{\dots, -7, -2, 3, 8, 13, \dots\} \\ 4 + H &= \{\dots, -6, -1, 4, 9, 14, \dots\} \\ 5 + H &= \{\dots, -5, 0, 5, 10, 15, \dots\} = H \\ 6 + H &= 1 + H \\ 7 + H &= 2 + H \end{aligned}$$

וכן הלאה. בסך הכל, יש חמש מחלקות שמאליות של $5\mathbb{Z}$ ב- \mathbb{Z} , וכן

$$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{H, 1 + H, 2 + H, 3 + H, 4 + H\}$$

דוגמה 5.4. ניקח את $G = (\mathbb{Z}_8, +)$, ונסתכל על $H = \langle 2 \rangle = \{0, 2, 4, 6\}$. המחלקות השמאליות הן

$$0 + H = H, \quad 1 + H = \{1, 3, 5, 7\}, \quad 2 + H = H$$

ובאופן כללי,

$$a + H = \begin{cases} H, & \text{if } a \equiv 0 \pmod{2} \\ 1 + H, & \text{if } a \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

נשים לב ש: $G = H \cup 1 + H$.

הערה 5.5. כפי שניתן לראות מהדוגמאות שהצגנו, המחלקות השמאליות (או הימניות) של H יוצרות חלוקה של G . נוסף על כך, יחס השוויון בין המחלקות הנוצרות ע"י שני איברים ב G הינו יחס שקילות.

כלומר עבור $a, b \in G$ ותת חבורה $H \leq G$, יחס השוויון $aH = bH$ הינו יחס שקילות בין a ו b . נסכם זאת בעזרת המשפט הבא:

משפט 5.6. תהי G חבורה, ותהי $H \leq G$ תת-חבורה. אזי $a, b \in G$

$$1. \quad aH = bH \text{ אם ורק אם: } b^{-1}a \in H, \text{ בפרט } a \in H \iff aH = H$$

$$2. \quad \text{לכל שתי מחלקות } g_1H \text{ ו-} g_2H, \text{ מתקיים } g_1H = g_2H \text{ או } g_1H \cap g_2H = \emptyset.$$

$$3. \quad \text{מתקיים } |aH| = |bH| = |H|.$$

$$4. \quad \text{האיחוד של כל המחלקות הוא כל } G; \bigcup_{g \in G} gH = G, \text{ וזהו איחוד זר.}$$

הוכחה. נוכיח את 1:

(\Leftarrow): אם $aH = bH$ אזי לכל $h \in H$, $ah \in bH$. בפרט עבור איבר היחידה $a = ae \in bH$ מכאן נובע שקיים $h_0 \in H$ כך ש $a = bh_0$,
 לכן בהכרח $b^{-1}a = h_0 \in H$.
 (\Rightarrow): נניח ש: $b^{-1}a \in H$, אזי קיים $h_0 \in H$, כך ש: $b^{-1}a = h_0$, לכן: $a = bh_0$.
 עתה, לכל $h \in H$ מתקיים ש: $ah = bh_0h \in bH$, לכן: $aH \subseteq bH$. אבל אם $a = bh_0$, אזי $b = ah_0^{-1}$, ונקבל באותו אופן ש $bH \subseteq aH$.
 לכן בהכרח: $bH = aH$. \square

הערה 5.7. קיימת התאמה חח"ע ועל בין המחלקות השמאליות $\{gH : g \in G\}$ לימניות $\{Hg : g \in G\}$.
 $(Hg \mapsto g^{-1}H)$, $\{Hg : g \in G\}$
 $gH \mapsto (gH)^{-1} = \{(gh)^{-1} : h \in H\} = \{h^{-1}g^{-1} : h \in H\} = \{kg^{-1} : k \in H\} = Hg^{-1}$
 לכן מס' המחלקות השמאליות = מספר המחלקות הימניות.

5.8 הגדרה. נסמן את מספר המחלקות של H ב G ע"י: $[G : H]$, מספר זה נקרא האינדקס של H ב G .

5.9 דוגמה. על פי הדוגמאות שראינו:

$$1. [\mathbb{Z} : 5\mathbb{Z}] = 5$$

$$2. [S_3 : \langle (1\ 2\ 3) \rangle] = 2$$

$$3. [\mathbb{Z}_8 : \langle 2 \rangle] = 2$$

5.10 תרגיל. מצאו חבורה G ותת חבורה $H \leq G$, כך ש: $[G : H] = \infty$

פתרון. תהי $G = (\mathbb{Q}, +)$ ותת חבורה $H = \mathbb{Z}$.
 ניקח שני שברים שונים מ \mathbb{Q} בין 0 ל 1: α_1, α_2 , ונתבונן במחלקות שאיברים אלו יוצרים. נקבל ש:

$$\{\alpha_1, \pm 1 + \alpha_1, \pm 2 + \alpha_1, \dots\} = \alpha_1 H \neq \alpha_2 H = \{\alpha_2, \pm 1 + \alpha_2, \pm 2 + \alpha_2, \dots\}$$

ולכן,

מספר המחלקות של H ב G הוא לפחות כמספר המספרים ב \mathbb{Q} בין 0 ל 1 שווה ∞ .

משפט 5.11 (לגרנז'). תהי G חבורה סופית, $H \leq G$. אזי: $|G| = [G : H] \cdot |H|$

5.12 מסקנה. עבור חבורה סופית, הסדר של תת חבורה מחלק את הסדר של החבורה.

$$\frac{|G|}{|H|} = [G : H]$$

כלומר: בפרט, עבור $a \in G$, $|a| = |G|$ כי $\langle a \rangle \leq G$.
 לכן הסדר של כל איבר בחבורה מחלק את הסדר של החבורה.
 במילים אחרות, לכל $a \in G$, $a^{|G|} = 1$.

5.13 דוגמה. עבור $|\mathbb{Z}_{10}| = 10$, הסדרים האפשריים של איברים ב \mathbb{Z}_{10} הם 1,2,5,10.

תרגיל 5.14. האם לכל מספר m המחלק את סדר החבורה הסופית G קיים איבר מסדר m ?

פתרון. לא בהכרח! דוגמה נגדית: נבחן את החבורה $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$. סדר החבורה הינו 16 אבל לא קיים איבר מסדר 16 (כי אם היה קיים, אזי הייתה זו חבורה ציקלית, אבל הוכחנו ש $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ אינה ציקלית).

משפט 5.15 (משפט אוילר). פונקציית אוילר $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, מוגדרת ע"י $\varphi(n) = |\mathbb{U}_n|$. עבור $a \in \mathbb{U}_n$, $a^{\varphi(n)} = 1 \pmod n$.

דוגמה 5.16. $(3, 10) = 1 \iff 3 \in \mathbb{U}_{10} \iff 3 \in \{1, 3, 7, 9\} = \mathbb{U}_{10}$. אזי: $\varphi(10) = |\mathbb{U}_{10}| = 4$. ואכן מתקיים: $3^{\varphi(10)} = 3^4 = 81 = 1 \pmod{10}$.

משפט 5.17. המשפט הקטן של פרמה (כמקרה פרטי של משפט אוילר): עבור p ראשוני מתקיים $|\mathbb{U}_p| = p - 1$, לכן לכל $a \in \mathbb{U}_p$ מתקיים ש $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ ובפרט $a^{p-1} = 1 \pmod p$.

תרגיל 5.18. חשב את שתי הספרות האחרונות של המספר 909^{121} .

פתרון. נזכר ש $\pmod n$ הינו יחס שקילות מכיוון ש $909 \equiv 9 \pmod{100}$, אזי נוכל לחשב 9^{121} :

כיוון ש $(9, 100) = 1$, אזי על פי משפט אוילר: $9^{\varphi(100)} = 9^{40} = 1 \pmod{100}$. מכאן ש: $9^{121} = (9^{40})^3 \cdot 9 \equiv 1^3 \cdot 9 \equiv 9 \pmod{100}$.

דוגמה 5.19. תהי G חבורה מסדר p ראשוני. יהי $e \neq g \in G$. לכן $|g| > 1$. מצד שני $|g| \mid |G| = p$, לכן בהכרח $|g| = p$, מה שאומר ש: $G = \langle g \rangle$. מאחר וזה נכון לכל $e \neq g \in G$, נסיק ש G נוצרת ע"י כל אחד מאיבריה שאינו היחידה.

טענה 5.20. תהי $G = \langle x \rangle$ חבורה ציקלית מסדר n ויהי $y = x^d$ כאשר $d > 0$, אזי: $|y| = \frac{n}{(d,n)}$ (ההוכחה בקובץ מערכי התרגול של הקורס - תרגיל 3.31).

דוגמה 5.21. $(\mathbb{Z}_{12}, +)$, חבורה ציקלית מסדר 12 הנוצרת ע"י $x = 1$. אם ניקח $y = x^8 = 8$, אזי נקבל: $\frac{12}{(8,12)} = \frac{12}{4} = 3$. מצד שני, על מנת לחשב את הסדר של y , נבדוק מהי תת החבורה הנוצרת ע"י y : $\langle 8 \rangle = \{0, 8, 4\} \leq (\mathbb{Z}_{12}, +)$. ואכן $|y| = |8| = |\langle 8 \rangle| = 3$.

מסקנה 5.22. בסימונים שלעיל, אם $(n, d) = 1$ אזי $\frac{n}{(d,n)} = \frac{n}{1} = n$. כלומר $G = \langle y \rangle$. מכאן נסיק שבחבורה ציקלית, כל איבר שחזקתו זרה למספר איברי החבורה - יוצר את החבורה. לכן מספר היוצרים בחבורה ציקלית מסדר n הוא כמספר המספרים השלמים הזרים ל n . כלומר מספר היוצרים הוא בדיוק $\varphi(n)$ (פונקציית אוילר).

טענה 5.23. תהי $G = \langle \alpha \rangle$ ציקלית מסדר n ויהי $m|n$. אזי ל G יש תת חבורה ציקלית יחידה מסדר m .

הוכחה. נסמן $H = \langle \alpha^{n/m} \rangle$. זוהי תת חבורה מסדר m . תהי K תת חבורה ציקלית נוספת מסדר m ז"א: $K = \langle \beta \rangle$. נרצה להוכיח ש: $K = H$. מאחר ש α יוצר של G , קיים $b \in \mathbb{Z}$ כך ש: $\beta = \alpha^b$, לכן על פי הטענה הקודמת, $|\beta| = \frac{n}{(n,b)}$.

אבל $m = \frac{n}{(n,b)} \Leftarrow m = \frac{n}{(n,b)} \Leftarrow (n,b) = \frac{n}{m} \Leftarrow m = \frac{n}{(n,b)}$. לפי תכונת ה gcd קיימים $s, t \in \mathbb{Z}$ כך $(n,b) = sn + tb$. לכן:

$\alpha^{n/m} = \alpha^{(n,b)} = \alpha^{sn+tb} = (\alpha^n)^s (\alpha^b)^t = 1 \cdot \beta^t \in K$
 כלומר קיבלנו ש: $\alpha^{n/m} \in K$, לכן $H \subseteq K$, אבל על פי ההנחה $|H| = |K|$, לכן $H = K$. כדורש. \square

תרגיל 5.24. כמה תת חבורות לא טריוויאליות יש ב \mathbb{Z}_{30} ? (לא טריוויאלית פירושו לא כולל את $\{0\}$ ואת \mathbb{Z}_{30})

על פי התרגיל, מאחר ומדובר בחבורה ציקלית, מס' תת החבורות הוא כמספר המחלקים של המספר 30, כלומר: $|\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}| = 8$. מאחר והסדרים 1 ו 30, מתאימים לת"ח הטריוויאליות, נותרנו עם 6 ת"ח לא טריוויאליות.

6 עוד על חבורות, תת חבורות, יוצרים, יחסים וסדרים

6.1 נוסחה לחישוב פונקציית אוילר

הערה 6.1. לצורך פתרון התרגיל הבא נפתח נוסחה נוחה לחישוב $\varphi(n)$, כלומר, בהנתן מספר שלם כלשהו, נוכל לחשב את מספר המספרים הקטנים ממנו בערך מוחלט וזרים לו.

על פי המשפט היסודי של האריתמטיקה, כל מספר שלם ניתן לפרק למכפלת חזקות של מספרים ראשוניים (עד כדי סדר וסימן). כלומר

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$$

קעת נתבונן בנפרד בפונקציית אוילר של חזקה של מספר ראשוני כלשהו במכפלה. ניתן בקלות להראות (הצב מספר כלשהו והיווכח):

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^{k-1}(p-1) = p^k \left(\frac{p-1}{p} \right) = p^k \left(1 - \frac{1}{p} \right)$$

ולכן, עבור מספר שלם כלשהו:

$$\varphi(n) = \varphi(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}) = \varphi(p_1^{k_1}) \varphi(p_2^{k_2}) \cdots \varphi(p_m^{k_m}) =$$

$$\begin{aligned}
&= p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m} \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = \\
&= n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)
\end{aligned}$$

נסכום:

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

דוגמה 6.2. נחשב את $\varphi(60)$:

$$\varphi(60) = 60 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 16$$

תרגיל 6.3. חשבו את שתי הספרות האחרונות של $80732767^{1999} + 2013$

פתרון. נפעיל $\text{mod } 100$ ונקבל

$$80732767^{1999} + 2013 \equiv 67^{1999} + 13 = 67^{50 \cdot 40 - 1} + 13 = (67^{40})^{50} \cdot 67^{-1} + 13 =$$

$$= (67^{\varphi(100)})^{50} \cdot 67^{-1} + 13 \equiv (1)^{50} \cdot 67^{-1} + 13 = 67^{-1} + 13$$

קעת נותר למצוא את ההופכי של 67 בחבורה U_{100} . (67 זר ל 100 ולכן נמצא ב U_{100})

לצורך כך, נשתמש באלגוריתם של אוקלידס לצורך מציאת פתרון למשוואה $67x = 1 \pmod{100}$.

יש פתרון למשוואה אם קיים $k \in \mathbb{Z}$ כך ש $100k + 67x = 1$. נבעזרת אלגוריתם אוקלידס נמצא ביטוי של $\text{gcd}(100, 67)$ כצירוף לינארי של 67 ו 100.

$$(100, 67) = [100 = 1 \cdot 67 + 33]$$

$$(67, 33) = [67 = 2 \cdot 33 + 1]$$

$$(33, 1) = 1$$

ומהצבה לאחור נקבל: $1 = 67 - 2 \cdot 33 = -2 \cdot 00 + 3 \cdot 67$, ולכן $x = 3$, כלומר ההופכי של 67 הוא 3.

לכן $67^{-1} + 13 = 3 + 13 = 16$. כלומר שתי הספרות האחרונות הם 16.

תרגיל 6.4. הוכיחו את הטענה הבאה: תהא G חבורה סופית, אזי G מסדר זוגי \Leftrightarrow קיים ב G איבר מסדר 2.
 (\Rightarrow) : על פי משפט לגרנז', הסדר של איבר מחלק את סדר החבורה ולכן סדר החבורה זוגי.
 (\Leftarrow) : לאיבר מסדר 2 תכונה יחודית - הוא הופכי לעצמו. נניח בשלילה שאין אף איבר ב G מסדר שני, כלומר שאין אף איבר שהופכי לעצמו (למעט איבר היחידה כמובן).
אזי, ניתן לסדר את כל איברי החבורה - זוגות זוגות, כאשר כל איבר מזווג לאיבר ההופכי לו. ביחד עם איבר היחידה נקבל מספר אי זוגי של איברים ב G בסתירה להנחה.

מסקנה 6.5. לחבורה מסדר זוגי יש מספר אי זוגי של איברים מסדר 2.

6.2 תת חבורה הנוצרת ע"י איברים

הגדרה 6.6. תהי G חבורה ותהי $A \subseteq G$ תת קבוצה לא ריקה איברים ב G (שימו לב ש A אינה בהכרח תת חבורה של G).
תת החבורה הנוצרת ע"י A הינה תת החבורה המינימלית המכילה את A ונסמנה $\langle A \rangle$.

אם $G = \langle A \rangle$ אז נאמר ש G נוצרת ע"י A .
עבור קבוצה סופית של איברים, נכתוב $\langle x_1, \dots, x_k \rangle$.
נשים לב שעבור קבוצה סופית של יוצרים, הגדרה ו מהווה הכללה לכתיבה של חבורה ציקלית הנוצרת ע"י איבר אחד.

דוגמה 6.7. אם ניקח $\{2, 3\} \subseteq \mathbb{Z}$ אז $\langle 2, 3 \rangle := H$. נוכיח ש $H = \mathbb{Z}$.
 $H \subseteq \mathbb{Z}$ ובפרט $\mathbb{Z} \subseteq H$. נראה שגם $\mathbb{Z} \subseteq H$ ומזה נסיק שוויון.
כיוון ש $2 \in H$ אזי גם $-2 \in H$ ומכאן ש $1 \in H$ (כי $1 = 3 + (-2)$). כלומר איבר היחידה שהוא כידוע היוצר של כל \mathbb{Z} , מוכל ב H .
לכן נקבל: $1 \in H \Rightarrow \mathbb{Z} = \langle 1 \rangle \subseteq H$. כלומר $\mathbb{Z} \subseteq H$, ומכאן נובע השוויון $H = \mathbb{Z}$.

דוגמה 6.8. אם ניקח $\{4, 6\} \subseteq \mathbb{Z}$ אזי נקבל: $\langle 4, 6 \rangle = \{4n + 6m : m, n \in \mathbb{Z}\}$.
נטען ש $2\mathbb{Z} = \gcd(4, 6) \cdot \mathbb{Z} = \langle 4, 6 \rangle$ (כלומר תת חבורה של השלמים המכילה רק את המספרים הזוגיים).
נוכיח ע"י הכללה דו כיוונית.

(\subseteq) : ברור ש $2|4m + 6n$ ולכן $\langle 4, 6 \rangle \subseteq 2\mathbb{Z}$.
 (\supseteq) : יהי $2k \in 2\mathbb{Z}$. אזי $2k \in \langle 4, 6 \rangle$ אזי $2k = 4(-k) + 6k \in \langle 4, 6 \rangle$. לכן מתקיים גם: $2\mathbb{Z} \subseteq \langle 4, 6 \rangle$.

דוגמה 6.9. במקרה שהחבורה אבלית, קל יותר לתאר את תת החבורה הנוצרת. למשל אם ניקח שני יוצרים $a, b \in G$ נקבל: $\langle a, b \rangle = \{a^i b^j : i, j \in \mathbb{Z}\}$.
כלומר בזכות הקומוטטיביות, ניתן לסדר את כל ה a -ים יחד וכל ה b -ים יחד. נדגים איבר הנוצר ע"י a ו b : $abaaab^{-1}bbba^{-1} = a^3 b^3$.

באופן כללי, בחבורה אבלית מתקיים:

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \{a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n} : \forall 1 \leq i \leq n, k_i \in \mathbb{Z}\}$$

דוגמה 6.10. נוח לעיתים לחשוב על איברי $\langle A \rangle$ בתור קבוצת מילים שניתן לכתוב באמצעות האותיות בקבוצה (היוצרים ב A).

נסביר: נגדיר את הא"ב שלנו להיות $A \cup A^{-1}$ כאשר $A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\}$. כעת, מילה היא סדרה סופית של אותיות מה- א"ב. המילה הריקה מייצגת כאן את איבר היחידה ב G .

6.3 החבורה הדיהדרלית

נציג חבורה חשובה נוספת שמקורה גאומטרי: החבורה הדיהדרלית.

הגדרה 6.11. עבור מספר טבעי n , הקבוצה D_n של סיבובים ושיקופים המעתיקים מצולע משוכלל בין n צלעות על עצמו, היא החבורה הדיהדרלית, יחד עם פעולת ההרכבה. אם σ הוא סיבוב ב $\frac{2\pi}{n}$ ו τ הוא שיקוף סביב ציר סימטריה כלשהו, אז:

$$D_n = \langle \sigma, \tau : \sigma^n = \tau^2 = id, \sigma\tau = \tau\sigma^{n-1} \rangle$$

צורת תאור זו נקראת תאור חבורה ע"י יוצרים ויחסים.

דוגמה 6.12. החבורה D_3 כוללת איברים מייצגים את כל הקומבינציות של סיבוב של 120° , המסומן באות σ , ושיקוף המסומן באות τ , על משולש שווה צלעות.

$$D_3 = \langle \sigma, \tau : \sigma^3 = \tau^2 = id, \sigma\tau = \tau\sigma^2 \rangle$$

כעת נתאר במפורש את כל איברי D_3

$$D_3 = \{id, \sigma, \sigma^2, \tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2\}$$

הערה 6.13. שימו לב שאמנם האיבר $\sigma\tau$ לא מופיע בתאור ששת האיברים אך על פי היחס שהוגדר $\sigma\tau = \tau\sigma^2$, לכן האיבר נמצא בחבורה, אך מתואר בכתיבה שונה.

הערה 6.14. בהמשך להערה הקודמת, נשים לב ש $\sigma\tau$ ו $\tau\sigma$ הם שני איברים שונים זה מזה (גזור משולש שווה צלעות, סמן את קודקודיו, ואז: פעם אחת שקף את המשולש ואח"כ סובב, ובפעם השניה סובב ואח"כ שקף ותיווכח שהמצב הסופי שבו מונח המושלש שונה בשני המקרים).

כלומר: החבורה D_3 אינה אבלית, ובאופן כללי, כל D_n כאשר $n \geq 3$ אינה אבלית.

הערה 6.15. סדר החבורה D_3 הינו: 6. ולכל n , הסדר של D_n הינו: $2n$.

6.4 סדר של איברים בחבורת התמורות

נחזור לחקור את חבורת התמורות S_n .

הערה 6.16. תזכורת: עבור מחזור σ מאורך k מתקיים: $o(\sigma) = k$.

טענה 6.17. (מופיעה כתרגיל בית בדף עבודה מס' 5)

תהי G חבורה. יהי $a, b \in G$ כך ש $ab = ba$ וגם $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = e$ (כלומר החיתוך בין ת"ח ציקלית הנוצרת ע"י a ות"ח ציקלית הנוצרת ע"י b היא טריוויאלית. אז:

$$o(ab) = \text{lcm}[o(a) \cdot o(b)]$$

מסקנה 6.18. סדר מכפלות מחזורים זרים ב S_n הוא ה lcm (הכמ"מ) של סדרי המחזורים.

דוגמה 6.19. הסדר של $(56)(123)$ הוא 6 והסדר של $(56)(1234)$ הוא 4.

תרגיל 6.20. מצאו ת"ח מסדר 45 ב S_{15} .

פתרון. נמצא תמורה מסדר 45 ב S_{15} . נתבונן באיבר

$$\sigma = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)(10, 11, 12, 13, 14)$$

$$o(\sigma) = [9, 5] = 45$$

ונשים לב כי $o(\sigma) = 45$. כעת, מכיוון שסדר האיבר שווה לסדר תת החבורה שאיבר זה יוצר, נסיק שתת החבורה $\langle \sigma \rangle$ עונה על הדרוש.

שאלה 6.21. האם קיים איבר מסדר 39 ב S_{15} ?

פתרון. לא. וזאת מכיוון שאיבר מסדר 39 לא יכול להתקבל כמכפלת מחזורים זרים ב S_{15} .

אמנם ניתן לקבל את הסדר 39 כמכפלת מחזורים זרים, האחד מאורך 13 והאחר מאורך 3, אבל $13 + 3 = 16$ ולכן, זה בלתי אפשרי ב S_{15} .

6.5 הצגת מחזור כמכפלת חילופים

הגדרה 6.22. מחזור מסדר 2 ב S_n נקרא חילוף.

טענה 6.23. כל מחזור (a_1, a_2, \dots, a_r) ניתן לרשום כמכפלת חילופים

$$(a_1, a_2, \dots, a_r) = (a_1, a_2) \cdot (a_2, a_3) \cdot \dots \cdot (a_{r-1}, a_r)$$

לכן:

$$S_n = \langle (i, j) : 1 \leq i, j \leq n \rangle$$

תרגיל 6.24. כמה מחזורים מאורך $2 \leq r \leq n$ יש בחבורה S_n ?

פתרון. זו שאלה קומבינטורית. בוחרים r מספרים מתוך n ויש $\binom{n}{r}$ אפשרויות כאלה. כעת יש לסדר את r המספרים ב $r!$ דרכים שונות. אבל ספרנו יותר מידי אפשרויות, כי יש r מחזורים זהים, נסביר:

$$(a_1, \dots, a_r) = (a_2, \dots, a_r, a_1) = \dots = (a_r, a_1, \dots, a_{r-1})$$

לכן נחלק את המספר הכולל ב r ונקבל מספר המחזורים מאורך r ב S_n הינו: $\binom{n}{r} \cdot (r-1)!$

תרגיל 6.25. מה הם הסדרים האפשריים לאיברי S_4 ?

פתרון. ב S_4 הסדרים האפשריים הם:

1. סדר 1 - רק איבר היחידה.
2. סדר 2- חילופים (i, j) או מכפלה של שני חילופים זרים, למשל (34) (12)
3. סדר 3- מחזורים מאורך 3, למשל (243) .
4. סדר 4- מחזורים מאורך 4, למשל (2431)

וזהו! כלומר הצלחנו למיין בצורה פשוטה ונוחה את כל הסדרים האפשריים ב S_4 .

תרגיל 6.26. מה הם הסדרים האפשריים לאיברי S_5 ?

1. סדר 1 - רק איבר היחידה.
2. סדר 2- חילופים (i, j) או מכפלה של שני חילופים זרים.
3. סדר 3- מחזורים מאורך 3.
4. סדר 4- מחזורים מאורך 4
5. סדר 5- מחזורים מאורך 5
6. סדר 6 - מכפלה של חילוף ומחזור מאורך 3, למשל (54) (231) .

וזהו!

6.6 סימן של תמורה וחבורת החילופין (חבורת התמורות הזוגיות)

הגדרה 6.27. יהי σ מחזור מאורך k , אזי הסימן שלו הוא :

$$\text{sign}(\sigma) = (-1)^{k-1}$$

ועבור התמורות $\tau, \sigma \in S_n$ מתקיים:

$$\text{sign}(\sigma\tau) = \text{sign}(\sigma) \text{sign}(\tau)$$

תכונה זו מאפשרת לחשב את הסימן של כל תמורה ב S_n .
נקרא לתמורה שסימנה 1 בשם תמורה זוגית ולתמורה שסימנה 0 בשם תמורה אי זוגית.

דוגמה 6.28. (נקודה חשובה ומאוד מבלבלת)

1. החילוף (35) הוא תמורה אי זוגית.

2. התמורה הריקה היא תמורה זוגית

3. מחזור מאורך אי זוגי הוא תמורה זוגית

הגדרה 6.29. חבורת החילופין (התמורות הזוגיות)

חבורת החילופין היא תת החבורה הבאה של S_n :

$$A_n = \{\sigma \in S_n \mid \text{sign}(\sigma) = 1\}$$

הערה 6.30. הסדר של A_n הינו: $|A_n| = \frac{n!}{2}$.

הגדרה 6.31. $A_3 = \{id, (123), (132)\}$

נשים לב כי $A_3 = \langle (123) \rangle$ כלומר A_3 ציקלית.

7 חבורות מנה ותת-חבורות נורמליות

נתבונן במקרה הבא:

דוגמה 7.1. לא בהכרח $gH = Hg$. למשל, ב- $G = S_3$, נסתכל על המחלקות של $H = \langle (1 2) \rangle = \{id, (1 2)\}$ מתקיים

$$(1 2 3)H = \{(1 2 3), (1 3)\}$$

$$H(1 2 3) = \{(1 2 3), (2 3)\}$$

ולכן המחלקות האלו שונות.

לתת חבורה המקיימת את השוויון $gH = Hg$ לכל $g \in G$ יש הגדרה מיוחדת ותפקיד מרכזי בתורת החבורות.

הגדרה 7.2. תת חבורה H של חבורה G , נקראת תת חבורה נורמלית (תח"נ), אם לכל $g \in G$ מתקיים $gH = Hg$. נסמן $H \triangleleft G$.