

תרגיל 6 - 1020

שאלה 1

יהי $(\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mu)$ מנצח מוסר

$$d(f, g) = \int_{\mathcal{R}} \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu \quad \text{כאשר } f, g \text{ מדידות}$$

(1) הראו ש- d היא מטריצה על מחלק הפונקציות המדידות $\mathcal{F}$.
 למעשה יחס השקילות $f \sim g \iff f = g$ כמובן.

פתרון (1)

$$h(x) = \frac{x}{1+x} \quad \text{מדידה} \quad . \quad h'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$$

לכן, $h(x)$ מונטונית עולה. נבחר כי d מטריצה על $J(\mathcal{R})$:

$$d(f, g) \geq 0 \iff f \sim g \quad (1a)$$

$$d(f, g) = d(g, f) \quad (1b)$$

$$(u \in J(\mathcal{R})) \quad d(f, g) \leq d(f, u) + d(g, u) \quad (1c)$$

1b

$$\forall n: A_n := \{ x \in \mathcal{R} \mid |f(x) - g(x)| \geq \frac{1}{n} \} \quad \text{כאשר } f \neq g \quad (1c)$$

$$A := \{ x \in \mathcal{R} \mid f(x) \neq g(x) \}$$

$$\mu(A) > 0$$

כן, מנצח המדידה μ מנצח את A , A_n (נכח) A_n סדרה עולה

$$\limsup A_n = \liminf A_n = A$$

לכן, מנצח המדידה μ קיים n כך ש- $\mu(A_n) > 0$: מנצח

נסמן $n_0 \leq n$

$$d(f, g) = \int_{\Omega} \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu \geq \int_{A_n} \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu \geq$$

$\uparrow$
 $A_n \subseteq \Omega$

נבחר A_n מהצורה
 f_n והצורה של
 מונטגומרי-צ'ורן
 נסיר $\frac{1}{n}$ שטח
 המונטגומרי-צ'ורן
 ביחס למונטגומרי-צ'ורן

$$\geq \int_{A_n} \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} d\mu = \frac{\mu(A_n)}{n+1} > 0$$

נבחר.

(א) המונטגומרי של f נבחר מניצור מונטגומרי

(ב) f אינו המונטגומרי של g המונטגומרי:

$$|f-g| = |f-u+u-g| \leq |f-u| + |g-u|$$

לכן - מונטגומרי f ומונטגומרי g אינם מונטגומרי:

$$d(f, g) = \int_{\Omega} \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu \leq \int_{\Omega} \frac{|f-u| + |g-u|}{1+|f-u| + |g-u|} d\mu$$

אנחנו
המונטגומרי

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \frac{|f-u|}{1+|f-u| + |g-u|} d\mu + \int_{\Omega} \frac{|g-u|}{1+|f-u| + |g-u|} d\mu \leq$$

מונטגומרי

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \frac{|f-u|}{1+|f-u|} d\mu + \int_{\Omega} \frac{|g-u|}{1+|g-u|} d\mu$$

$$= d(f, u) + d(g, u)$$

נבחר.

(2) הנכחה שמשוואות :

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \quad (\Leftrightarrow) \quad d(f_n, f) \rightarrow 0$$

כייוון (2)

כייוון השוויון :

$$f_n \xrightarrow{d} f \quad \text{נניח}$$

לבד $n, k \in \mathbb{N}$ | נבחר :

$$A_{n,k} := \{x \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k}\}$$

כמו בהוכחה של פסל גרנק :

$$\forall n, k : \quad d(f_n, f) \geq \frac{\mu(A_{n,k})}{1+k}$$

אולם, לפי ההנחה $f_n \xrightarrow{\mu} f$ נשאר שיש n ו- k כך ש-

$$\forall k \in \mathbb{N} : \quad \mu(A_{n,k}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

כלומר $\{A_{n,k}\}$ מתכווץ (המשפט המרכזי) :

$$f_n \xrightarrow{\mu} f$$

כייוון השוויון :

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \quad \text{ויהי } 0 < \epsilon$$

יש אמצעים האינטגרל ביחס μ :

$$d(f_n, f) := \int \frac{|f - f_n|}{1 + |f - f_n|} d\mu = \int_{A_{n,k}} \frac{|f - f_n|}{1 + |f - f_n|} d\mu + \int_{A_{n,k}^c} \frac{|f - f_n|}{1 + |f - f_n|} d\mu$$

(במשפט הכיוון השוויון) $A_{n,k}$ כמו בהוכחה

כאן: מונטרט האינטגרל:

$$\int_{\Omega \setminus A_{nk}} \frac{|f - f_n|}{1 + |f - f_n|} d\mu \leq \frac{1}{k} \mu(\Omega \setminus A_{nk}) \leq \frac{1}{k} \mu(\Omega)$$

$$\forall x: f(x) \leq 2$$

$$\int_{A_{nk}} \frac{|f - f_n|}{1 + |f - f_n|} d\mu \leq 2\mu(A_{nk})$$

מכאן:

סיון שהנחת $f_n \rightarrow f$ וכל מה שהעידה μ סופית (Ω, S) ליימון k_0, n_0 בזמן ביום

$$\mu(A_{nk_0}) < \frac{\epsilon}{4}$$

כך ש-

$$\frac{1}{k_0} \mu(\Omega) < \frac{\epsilon}{2}$$

ולכן:

$$d(f, f_n) \leq \frac{1}{k_0} \mu(\Omega) + 2\mu(A_{nk_0}) \leq \epsilon$$

$$f_n \xrightarrow{d} f$$

בצורה

מסומן:

שנייה 2

לפי $f_n \searrow f$ סדרה נכדו, אי-שיוויון מונטגומי (X, μ) ש $f_n \in L^1(X)$ ו N קיים $f_N \in L^1(X)$ ש

$$\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu. \quad \text{הוכחה "}$$

וכן:

$$0 \leq h_n := f_N - f_n \leq f_N \quad N \leq n \quad \text{כי}$$

h_n סדרה חדשה של פונקציות אי-שליליות:

$$\text{ומקיים:} \quad \int_X h_n d\mu \leq \int_X f_N d\mu < \infty \quad (\text{ממוננות, האינטגרל})$$

לכן על ידי משפט המעבר ללמטה - המונטגומי - עבור

$$\text{הסדרה} \quad (h_n)_{n=N}^{\infty} \quad \text{והסיק:}$$

$$\lim \int_X h_n d\mu = \int_X \lim h_n d\mu < \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_N - f_n) = f_N - f \quad \text{כ/כ}$$

$$\lim \int_X f_N - f_n d\mu = \int_X f_N - f d\mu < \infty \quad \text{כי}$$

$$\int_X f_N d\mu - \lim \int_X f_n d\mu = \int_X f_N d\mu - \int_X f d\mu$$

למשל, האינטגרל הממוננת (המוננת) והמעבר ללמטה

אז נוסח משני המעבר

$$\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu \quad \text{אם } \int_X f_N d\mu < \infty$$

3. יהי (X, S, μ) מ"ח סיגמא סופי. נניח f הינה אינטגרלית ואי שלילית. הוכיחו כי אם $\varepsilon > 0$ אזי קיימת $A \in S$ כך ש $\mu(A_\varepsilon) < \infty$ ומתקיים

$$\varepsilon + \int_{A_\varepsilon} f > \int f$$

פתרון:

מכיוון ש (X, S, μ) הינו מ"ח סיגמא סופי, נובע כי קיימת סדרה של קבוצות $F_n \in S$ כך ש $\mu(F_n) < \infty$ וגם $X = \bigcup_n F_n$. ללא הגבלת הכלליות נניח כי F_n זרות.

נסמן $E_k = \bigcup_{n=1}^k F_n$ איחוד סופי של קבוצות, ונסמן $f_n = f \cdot 1_{E_n}$ (הצמצום של f על E_n). מכיוון ש $X = \bigcup_k E_k$ נובע כי $f_n \rightarrow f$, ומכיוון ש f אי שלילית נובע כי $f_n \uparrow f$. כעת, מכיון ש f

אינטגרלית, נוכל להשתמש במשפט ההתכנסות המונוטונית של לבג להסיק ש

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f \cdot 1_{E_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} f = \int f$$

מכיוון ש $f \geq f_n$ נובע כי $\int_{E_n} f \leq \int f$

ומכאן ש $\int_{E_n} f \uparrow \int f$. קל לראות כי $\mu(E_k) < \infty$ לכל k וכי מהגדרת הגבול נובע כי

$$\varepsilon + \int_{E_{k_0}} f > \int f$$

עבור k_0 מספיק גדול. נגדיר $A_\varepsilon := E_{k_0}$ ונקבל את הנדרש.

שאלה 4

יהי (X, μ, σ) מנ״ח σ -סופי,

ומי $f \geq 0$ מדידה μ -י- $\int_X f d\mu = \infty$ - ש-

הסיו של $M > 0$ קיימת פונקציה g , מדידה μ -י- $g \geq 0$ - ש-

$0 \leq g \leq f$ כמ״כ μ , התחייב!

$$\int_X g d\mu \geq M \quad (1)$$

$$\|g\|_\infty < \infty \quad (2)$$

$$\mu(\{g > 0\}) < \infty \quad (3)$$

פתרון: מן כי הערה הוא σ סופי ולכן טל נהפך:

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \quad \text{כאשר } A_n \text{ בעלת מידה סופית,}$$

$$E_k := \bigcup_{n=1}^k A_n \quad \text{והי } 0 < \mu(E_k) < \infty$$

$$f_k := \mathbb{1}_{E_k} f$$

מכיון ש $f \geq 0$, הסדרה f_k מונטונה עולה f -י, ולכן לפי משפט

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\mu = \int_X f d\mu = \infty$$

↑
מנ״ח

$$\int_X f_{k_0} d\mu > M+1 \quad \text{כך ש-}$$

$$j \in \mathbb{N} \quad g_j := \mathbb{1}_{\{f < j\}} f_{k_0}$$

אזי $0 \leq g_j \leq f_{k_0}$ מדידה μ -י- f_{k_0} ולכן אישפט ההתכנסות המונטונה

קובע כי:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_X g_j d\mu = \int_X f_{k_0} d\mu > M+1$$

↑
יש פונקציה g

נבחר j_0 כך ש $\int_X g_{j_0} d\mu > M$ -ע g וזו היא j_0 .

כעת, נגדיר:

$$g_i = g_{j_0} = 1_{E_{k_0}} 1_{[i < j_0]}$$

יש g מקיים $0 \leq g < j_0$ וזו היא g המקסימלית.

$$\int_X g d\mu > M \quad (1)$$

$$0 \leq g < j_0 \quad (2)$$

$$\mu(E_{k_0}) < \infty \quad (3)$$

5. תהי $g(x)$ פונקציה המקיימת $g(x) = g(x+1)$ לכל $x \in \mathbb{R}$ ובנוסף מתקיים כי $\int_{[0,1]} g dm$ הוא סופי.

נגדיר

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(nx)}{n^2}$$

הראו ש f סופית כמעט בכל מקום.

פתרון:

מכיון ש $g(x)$ מחזורית 1, לפי הגדרת $f(x)$ גם היא מחזורית 1, כלומר $f(x+1) = f(x)$.

מכאן שמספיק להראות כי f סופית כב"מ על הקטע $[0, 1]$.

הוכחנו בתרגול כי פונקציה אינטגרבילית היא סופית כב"מ.

בנוסף, מהגדרת האינטגרל, אם $\int_{[0,1]} g dm$ סופי אזי g אינטגרבילית בקטע.

נסמן: $c := \int_{[0,1]} |g| dm < \infty$.

נשים לב כי

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} |f| dm &\leq \int_{[0,1]} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|g(nx)|}{n^2} dm(x) \stackrel{\text{monotone convergence}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,1]} \frac{|g(nx)|}{n^2} dm(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,n]} \frac{|g(x)|}{n^3} dm(x) \stackrel{\text{periodicity}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_{[0,1]} |g| dm = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{n^2} < \infty \end{aligned}$$

מכאן נובע כי f אינטגרבילית ב $[0, 1]$ ולכן סופית כב"מ שם. מכאן, לפי המחזוריות של f נקבל שהיא סופית כב"מ.