

חשבון אינפיניטסימלי 2 (88133)

חישובים וקירובים באמצעות טיילור-מקלורן

יונתן סמידוברסקי

מתוך הרצאות ותקציר הקורס של פרופ' צבאן, מצורפות גם דוגאות לשימושים ויישומים

משפט טיילור-מקלורן

משפט:

1) נניח ש $f^{(n)}(0)$ קיימת. אזי:

(א) קיימת הצגה יחידה $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + r(x)$ כך ש $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{x^n} = 0$

(ב) בהצגה זו, $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ לכל k , כלומר:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + r(x) = \sum_{k=0}^n \left[\frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right] x^k + r(x)$$

משפט:

2) שארית לגראנז': נניח ש $f^{(n)}(0)$ קיימת ורציפה ב $[0, b]$, וכן גזירה ב $(0, b)$. לכל $0 < x < b$ יש $0 < x_x < x$ כך ש

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} x^{n+1}}_{r(x)}$$

בדומה עבור סביבה שמאלית של 0 וסביבה מנוקבת.

משפט:

3) קירוב טיילור מקלורן בנקודה כללית: הכללה לפיתוח סביב a כללית:

(א) אם $f^{(n)}(a)$ קיימת, אז $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r(x)$

ומתקיים $\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{(x-a)^n} = 0$. יתר על כן, הצגה זו יחידה

(ב) אם $f^{(n)}$ קיימת ורציפה ב $[a, b]$ וגזירה ב (a, b) אז לכל $a < x < b$ יש $a < c_x < x$ כך שמתקיים

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{r(x)}$$

בדומה עבור סביבה שמאלית וסביבה מנוקבת

* הפיתוח סביב $x_0 = 0$ נקרא פיתוח מקלורן, ובמקרה הכללי נקרא פיתוח טיילור

הוכחה

(א1) נניח בשלילה שישנן שתי הצגות

$$b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + \widetilde{r(x)} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + r(x)$$

כעת ידוע כי $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\widetilde{r(x)}}{x^n} = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{x^n} = 0$ בפרט לכל $k = 0, \dots, n$ מתקיים כי

$$\frac{r(x)}{x^k} = \frac{r(x)}{x^n} \cdot x^{n-k}$$

אבל בשאיפה לאפס ראינו שצד שמאל שואף לאפס, ולגבי צד שני

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{n-k} = \begin{cases} 1 & k = n \\ 0 & k < n \end{cases}$$

ומחשבון גבולות בכל מקרה לכל k כזה מתקיים $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{x^k} = 0$ ובאותו האופן $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\widetilde{r(x)}}{x^k} = 0$ כעת, נחזור למשוואה המקורית ונשאיף $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} [b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + \widetilde{r(x)}] = \lim_{x \rightarrow 0} [a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + r(x)]$$

כל האיברים מלבד האיבר החופשי שואפים לאפס (במקרה של $r(x)$ או $\widetilde{r(x)}$ זה שקול לביטוי $\frac{r(x)}{x^0}$ או $\frac{\widetilde{r(x)}}{x^0}$ אשר ראינו כי שואף לאפס) נשארנו עם

$$b_0 = a_0$$

אז נציב במשוואה המקורית ונחסר משני הצדדים לקבלת

$$b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + \widetilde{r(x)} = a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + r(x)$$

נחלק ב- x ונקבל

$$b_1 + b_2x + \dots + b_nx^{n-1} + \frac{\widetilde{r(x)}}{x} = a_1 + a_1x + \dots + a_nx^{n-1} + \frac{r(x)}{x}$$

שוב, משאיפים $x \rightarrow 0$ ומטענת העזר כל המחוברים מלבד האיברים החופשיים יתאפסו, נקבל

$$b_1 = a_1$$

ממשיכים כך עם חיסורם וחילוק ב x עד שמקבלים

$$a_0 = b_0$$

$$a_1 = b_1$$

$$a_2 = b_2$$

$\vdots$

$$a_n = b_n$$

ומהמשוואה המקורית קיבלנו גם $\widetilde{r(x)} = r(x)$. וסיימנו.

(ב1) נותר להוכיח קיום

$$r(x) := f(x) - \underbrace{p(x)}_{\text{ניקח}}$$

$$f(0) + f^{(1)}(0) \cdot x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{x^n} = 0$$

יש להוכיח עבור $k = 0, 1, \dots, n$ מקבלים (מלמה מההרצאה)

$$r^{(k)}(0) = f^{(k)}(0) - \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot k! = 0$$

נפעיל את כלל לופיטל $n - 1$ פעמים:

הפונקציה $r^{(k)}(x)$ גזירה ב-0 לכל $k = 0, 1, \dots, n - 1$

בפרט הפונקציה רציפה ב0 ולכן

$$\lim_{x \rightarrow 0} r^{(k)}(0) = r^{(k)}(0) = 0$$

כעת, אפשר להפעיל לופיטל כפי שרצינו

$$\lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{r(x)}{x^n}}_{\rightarrow 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{r'(x)}{nx^{n-1}}}_{\rightarrow 0} = \dots = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r^{(n-1)}(x)}{n! \cdot x} = \frac{1}{n!} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r^{(n-1)}(x)}{x}$$

$$= \frac{1}{n!} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r^{(n-1)}(x) - r^{(n-1)}(0)}{x - 0} = \frac{1}{n!} [r^{(n-1)}]'(0) = \frac{1}{n!} \cdot r^{(n)}(0) = 0$$

וסיימנו.

(2) יהי $x \in (0, b)$ קבוע
לכל $t \in (0, b)$ נגדיר פונקציה באופן הבא

$$q(t) := f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k$$

נסמן $u(t) := (x-t)^{n+1}$
ובעבור שניהם, הצבה של x תיתן $q(x) = 0 = u(x)$
(לשים לב שהפונקציה מקבלת ערכים לפי t ו- x הוא קבוע נתון)
כעת

$$\frac{r(x)}{x^{n+1}} = \frac{q(0)}{x^{n+1}} = \frac{\overbrace{q(0) - q(x)}^0}{\underbrace{u(0) - u(x)}_{x^{n+1}} \underbrace{0}_0}$$

כעת ממשפט ערך הממוצע המוכלל קיים $0 < c_x < x$ כך ש

$$\frac{q(0) - q(x)}{u(0) - u(x)} = \frac{q'(c_x)}{u'(c_x)}$$

נמשיך לפתח את $\frac{q'(c_x)}{u'(c_x)}$ ולבסוף נשווה ל $\frac{r(x)}{x^{n+1}}$. ראשית,

$$u'(t) = (n+1)(x-t)^n(-1)$$

(הגזירה נעשית לפי t)
ובנוסף,

$$\begin{aligned} q'(t) &= \overbrace{[f(x)]'}^{0(\text{constant})} - \cancel{[f'(t)]} + \left(\cancel{f''(t)(x-t)} - \cancel{f'(t)} \right) + \left(\cancel{\frac{f^{(3)}(t)}{2}(x-t)^2} - \cancel{2(x-t)} \frac{f''(t)}{2} \right) \\ &+ \dots + \left(\cancel{\frac{f^{(n)}}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}} - \cancel{(n-1)(x-t)^{n-2}} \frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!} \right) + \left(\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \cancel{n(x-t)^{n-1}} \frac{f^{(n)}(t)}{n!} \right) \end{aligned}$$

ולאחר צמצום מקבלים

$$q'(t) = -\left[\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n \right]$$

ולסיכום, אם נציב בשניהם c_x נקבל:

$$\frac{r(x)}{x^{n+1}} = \frac{q'(c_x)}{u'(c_x)} = \frac{-[\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{n!}(x - c_x)^n]}{-(n+1)(x - c_x)^n} = \frac{\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{n!}}{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}$$

ולסיום,

$$r(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

(3) מגדירים $\widetilde{f(h)} := f(a+h)$ ומפעילים את המשפטים עליו, לאחר מכן מציבים במקום $h := x - a$

דוגמאות לשימושים

(א) $\sin(x)$ (טור מקלורן)

נרצה למצוא קירוב של ערכי הפונקציה $\sin(x)$,גדיר $f(x) = \sin(x)$

$$f^{(0)}(x) = \sin(x) \Rightarrow f^{(0)}(0) = 0$$

$$f^{(1)}(x) = \cos(x) \Rightarrow f^{(1)}(0) = 1$$

$$f^{(2)}(x) = -\sin(x) \Rightarrow f^{(2)}(0) = 0$$

$$f^{(3)}(x) = -\cos(x) \Rightarrow f^{(3)}(0) = -1$$

ומתקיימות מחזוריות לכן בעצם

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & n = 2m \\ (-1)^m & n = 2m + 1 \end{cases}$$

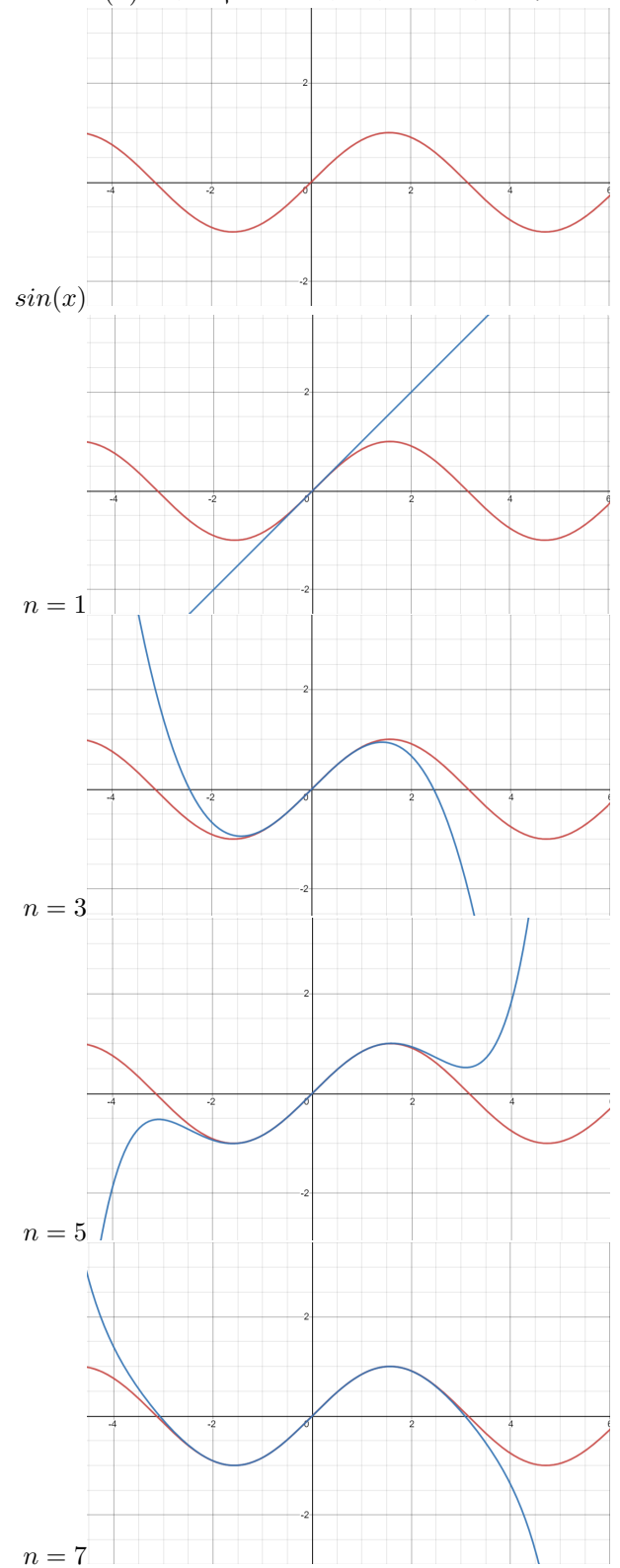
נציב בנוסחת טיילור- מקלורן לקבלת

$$f(x) \approx 0 + x + 0 + \frac{(-1)}{6}x^2 + 0 + \frac{x^5}{120} + r(x)$$

אפשר לקחת כמה רמת דיוק שנרצה, ו $r(x)$ מבטא את השגיאה. כלומר

$$T_{\sin x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2m+1)!} x^{2m+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

המשמעות הגרפית מבחינת רמת הדיוק ביחס ל $\sin(x)$:



(ב) $\cos(x)$ (טור מקלורן)

באופן דומה, נקבל $T_{\cos x}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$

(ג) $\ln(x+1)$ (טור מקלורן)

נגדיר $f(x) := \ln(x+1)$

$$f^{(0)}(x) = \ln(x+1) \Rightarrow f^{(0)}(0) = 0$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow f^{(1)}(0) = 1$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} \Rightarrow f^{(2)}(0) = -1$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \Rightarrow f^{(3)}(0) = 2$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(x+1)^4} \Rightarrow f^{(4)}(0) = -6$$

נשים לב שלכל $n \geq 1$ מתקיים $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ וסך הכל

$$T_{\ln(x+1)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} x^{n+1}$$

(ד) e^x (קירוב עם רמת דיוק מתאימה)

דוגמה מההרצאה, ניקח את $f(x) := e^x$, לכל n מתקיים כי $f^{(n)}(x) = e^x$ ולכן $f^{(n)}(0) = 1$ (ניעזר בשארית לגראנז') סך הכל נקבל, לכל $x > 0$ קיימת $0 < c < x$ כך ש

$$e^x = 1 + x + \overbrace{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!}} + \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}$$

למשל, נרצה לחשב את e ברמת דיוק של 0.001, נבדוק כמה ספרות צריך לקחת

$$|r| = \frac{e^c}{(n+1)!}$$

אבל $0 < c < 1$, ולכן

$$|r_n(x)| = \frac{e^c}{(n+1)!} \leq \frac{e}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!}$$

נרצה $|r_n(x)| < 0.001$ כלומר $\frac{3}{(n+1)!} \leq \frac{1}{1000}$

נקבל $3000 \leq (n+1)!$

נקבל שהמס' הקטן ביותר שאפשר להציב (בכל זאת, נרצה חישוב יחסית פשוט) הוא $n = 6$

כלומר

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = \frac{1957}{720} = 2.718055555\dots$$