מבחן מועד ב' – בדידה 88-195 – 09.03.25

צוות הקורס: ארז שיינר, שירה ידעי משך המבחן: שלוש שעות חומר עזר: מחשבון בלבד

הוראות: יש לענות על כל השאלות, על גבי טופס המבחן במקום המתאים, מחברת הטיוטא לא תסרק ולא תבדק.

1. (32 נק') תהיינה קבוצות A, B, C, הוכיחו או הפריכו כל אחד מן הסעיפים הבאים:
   - א. $A \setminus (B \setminus C) \subseteq A \setminus (B \cup C)$
   - ב. $A \setminus (B \setminus C) \supseteq A \setminus (B \cup C)$
   - ג. $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A)$
   - ד. $\mathcal{P}(A \setminus B) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\}$
2. (21 נק') נבים ביחס R על קבוצת הממשיים $\mathbb{R}$ המוגדר על ידי הכלל

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: aRb \leftrightarrow (|a| = |b|)$$

במילים: a מתייחס לb אם הערכים המוחלטים שלהם שווים.

   - א. הוכיחו כי R יחס שקילות.
   - ב. לכל ערך $x \in \mathbb{R}$ קבעו והוכיחו אם עוצמת מחלקת השקילות $|[x]_R|$ היא סופית, $\aleph_0$, $\aleph$ או $2^{\aleph}$. אם היא סופית, מצאו אותה.
   - ג. קבעו והוכיחו אם עוצמת קבוצת המנה $\left|\mathbb{R}/_R\right|$ היא סופית, $\aleph_0$, $\aleph$ או $2^{\aleph}$. אם היא סופית, מצאו אותה.
3. (21 נק') נבים ביחס S על קבוצת הטבעיים $\mathbb{N}$ המוגדר על ידי הכלל $\forall a, b \in \mathbb{N}: aSb \leftrightarrow \big((b = a) \vee b - a > 1\big)$

הערה: $0 \in \mathbb{N}$.

   - א. הוכיחו כי S יחס סדר חלקי.
   - ב. מצאו את קבוצת כל האיברים המינימליים לפי היחס S ב $\mathbb{N}$.
   - ג. האם קיים חסם עליון $\sup\{0,1,2,3\}$? אם כן מצאו אותו, אחרת הוכיחו שלא קיים.
4. (18 נק') תהי קבוצה A ותהיינה פונקציות $f, g \in A^A$.
   - א. הוכיחו או הפריכו: אם $f \circ g = g \circ f$, אזי f הפיכה.
   - ב. הוכיחו או הפריכו: אם f הפיכה, אזי $f \circ g = g \circ f$.
5. (18 נק') קבעו והוכיחו עבור כל אחת מהקבוצות הבאות אם היא מעוצמה סופית, $\aleph_0$, $\aleph$ או $2^{\aleph}$. אם הקבוצה מעוצמה סופית, מצאו את העוצמה.
   - א. $A = \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid Im(f) = \{0,1\}\}$.
   - ב. $B = \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \exists a \in \mathbb{R}: Im(f) = \{a\}\}$.

את הפתרונות יש לכתוב במקומות המתאימים בדפים הבאים (אפשר לכתוב משני צידי הדף).

1. (32 נק') תהיינה קבוצות A, B, C, הוכיחו או הפריכו כל אחד מן הסעיפים הבאים:

א. $A \setminus (B \setminus C) \subseteq A \setminus (B \cup C)$

ב. $A \setminus (B \setminus C) \supseteq A \setminus (B \cup C)$

ג. $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A)$

ד. $\mathcal{P}(A \setminus B) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\}$

פתרון:

המשך פתרון שאלה 1:

2. (21 נק') נביט ביחס R על קבוצת הממשיים $\mathbb{R}$ המוגדר על ידי הכלל

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: aRb \leftrightarrow (|a| = |b|)$$

במילים: a מתייחס לb אם הערכים המוחלטים שלהם שווים.

א. הוכיחו כי R יחס שקילות.

ב. לכל ערך $x \in \mathbb{R}$ קבעו והוכיחו אם עוצמת מחלקת השקילות $|[x]_R|$ היא סופית, $\aleph_0$, $\aleph$ או $2^{\aleph}$. אם היא סופית, מצאו אותה.

ג. קבעו והוכיחו אם עוצמת קבוצת המנה $\left|\mathbb{R}/_R\right|$ היא סופית, $\aleph_0$, $\aleph$ או $2^{\aleph}$. אם היא סופית, מצאו אותה.

פתרון:

המשך פתרון שאלה 2:

המשך פתרון שאלה 2:

3. (21 נק') נביט ביחס S על קבוצת הטבעיים $\mathbb{N}$ המוגדר על ידי הכלל $\forall a,b \in \mathbb{N}: aSb \leftrightarrow \big((b=a) \vee b-a>1\big)$

הערה: $0 \in \mathbb{N}$.

א. הוכיחו כי S יחס סדר חלקי.

ב. מצאו את קבוצת כל האיברים המינימליים לפי היחס S ב $\mathbb{N}$.

ג. האם קיים חסם עליון $\sup\{0,1,2,3\}$? אם כן מצאו אותו, אחרת הוכיחו שלא קיים.

פתרון:

המשך פתרון שאלה 3:

המשך פתרון שאלה 3:

4. (18 נק') תהי קבוצה A ותהיינה פונקציות $f, g \in A^A$.

א. הוכיחו או הפריכו: אם $f \circ g = g \circ f$, אזי f הפיכה.

ב. הוכיחו או הפריכו: אם f הפיכה, אזי $f \circ g = g \circ f$.

פתרון:

המשך פתרון שאלה 4:

המשך פתרון שאלה 4:

5. (18 נק') קבעו והוכיחו עבור כל אחת מהקבוצות הבאות אם היא מעוצמה סופית, $\aleph_0$, $\aleph$ או $2^{\aleph}$. אם הקבוצה מעוצמה סופית, מצאו את העוצמה.

א. $A = \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid Im(f) = \{0,1\} \}$.

ב. $B = \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \exists a \in \mathbb{R}: Im(f) = \{a\} \}$.

פתרון:

המשך פתרון שאלה 5:

המשך פתרון שאלה 5:

דף נוסף לפתרון שאלה מספר _____:

דף נוסף לפתרון שאלה מספר _____: