מבחן מועד ב' – בדידה 88-195 – 09.03.25

צוות הקורס: ארז שיינר, שירה ידעי **משך המבחן: שלוש שעות** **חומר עזר: מחשבון בלבד**

הוראות: יש לענות על כל השאלות, על גבי טופס המבחן במקום המתאים, מחברת הטיוטא לא תסרק ולא תבדק.

הצעת פתרון: דן בן חנוך+עדי מכנס

1. (32 נק') תהיינה קבוצות A, B, C, הוכיחו או הפריכו כל אחד מן הסעיפים הבאים:

א) $A \setminus (B \setminus C) \subseteq A \setminus (B \cup C)$

ב) $A \setminus (B \setminus C) \supseteq A \setminus (B \cup C)$

ג) $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A)$

ד) $\mathcal{P}(A \setminus B) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\}$

פתרון:

א) הפרכה:

$A = \{1,2,3\}, B = \{1,2\}, C = \{1\}$

ו:

$B \setminus C = \{2\}, B \cup C = \{1,2\}$

ו:

$A \setminus (B \setminus C) = \{1,3\}$

$A \setminus (B \cup C) = \{3\}$

והרי $\{1,3\} \not\subseteq \{3\}$

ב) הוכחה:

יהי $x \in A \setminus (B \cup C)$ **לכן** $x \in A$ **ו** $x \notin B$**(כי נב"ש** $x \in B$ **לכן** $x \in B \cup C$ **סתירה)**

לכן $x \notin B \setminus C$ **(כי נב"ש** $x \in B \setminus C$ **לכן** $x \in B$ **סתירה)**

ולכן $x \in A \setminus (B \setminus C)$

■

ג) הוכחה:

תהי $X \in \mathcal{P}(A \setminus B)$ **לכן** $X \subseteq A \setminus B$ **ולכן לכל** $c \in X$ $c \in A \setminus B$ **ולכן** $c \in A$ **ולכן** $X \subseteq A$ **ולכן** $X \in \mathcal{P}(A)$

■

ד) הוכחה:

הכלה דו כיוונית:

הכיוון הראשון טריוויאלי

הכיוון השני:

תהי $X \in \mathcal{P}(A \setminus B) \cap \mathcal{P}(B)$ **לכן** $X \subseteq A \setminus B, B$

נב"ש שיש איברים בX **ניקח אחד מהם,**c

לכן $c \in A \setminus B, B$ **סתירה**

לכן אין איברים בX **ולכן** X **קבוצה ריקה**

■

2. (21 נק') נביט ביחס R על קבוצת הממשיים $\mathbb{R}$ המוגדר על ידי הכלל

$$\forall a,b \in \mathbb{R}: aRb \leftrightarrow (|a| = |b|)$$

במילים: a מתייחס לb אם הערכים המוחלטים שלהם שווים.

א) הוכיחו כי R יחס שקילות.

ב) לכל ערך $x \in \mathbb{R}$ קבעו והוכיחו אם עוצמת מחלקת השקילות $|[x]_R|$ היא סופית, $\aleph_0$, $\aleph$ או $2^{\aleph}$. אם היא סופית, מצאו אותה.

ג) קבעו והוכיחו אם עוצמת קבוצת המנה $\left|{}^{\mathbb{R}}/_{R}\right|$ היא סופית, $\aleph_0$, $\aleph$ או $2^{\aleph}$. אם היא סופית, מצאו אותה.

פתרון:

.1

רפלקסיביות:

יהי $a \in \mathbb{R}$ לכן $|a| = |a|$ולכן aRa

סימטריות:

יהי $(a,b) \in R$ לכן $|a| = |b|$ולכן $|b| = |a|$ ולכן $(b,a) \in R$

טרנזיטיביות:

יהי $(a,b),(b,c) \in R$ לכן מתקיים כי $|a| = |b| = |c|$ ולכן aRc

2. נחלק למקרים:

$x = 0$:

מחלקת השקילות היא כל ה a כך ש $|a| = 0$ ולכן $a = 0$ ולכן העוצמה היא 1

$x \neq 0$:

מחלקת השקילות היא כל ה a כך ש$|a| = |x|$ ולכן $a = \pm x$ וכיוון שx שונה מ0 קיימים 2 x-ים כאלו ולכן העוצמה היא **2**

3. נבנה פונקציה חח"ע ועל מקבוצת המנה ל$[0,\infty)$ על ידי: $f([x]_R) = |x|$

א) היא שלמה כי לכל מחלקת שקילות של x קיים בה איבר לדוגמא x

ב) היא חד ערכית כי המחלקת שקילות של איבר זה רק הערך מוחלט שלו ומינוס הערך מוחלט שלו ולשתיהם יש אותו ערך מולט

ג) היא חח"ע כי אם $x = y$ אזי $[x]_R = [y]_R$

ד) היא על כי לכל איבר קיימת מחלקת שקילות שהוא נמצא בה שהיא $[|x|]$

ולכן $\left|{}^{\mathbb{R}}/_{R}\right| = \aleph$

4. **(21 נק׳) נביט ביחס S על קבוצת הטבעיים $\mathbb{N}$ המוגדר על ידי הכלל $\forall a,b \in \mathbb{N}: aSb \leftrightarrow$**

$$\big((b = a) \vee b - a > 1\big)$$

הערה: $0 \in \mathbb{N}$.

א) **הוכיחו כי S יחס סדר חלקי.**

ב) **מצאו את קבוצת כל האיברים המינימליים לפי היחס S ב $\mathbb{N}$.**

ג) **האם קיים חסם עליון $\sup\{0,1,2,3\}$? אם כן מצאו אותו, אחרת הוכיחו שלא קיים.**

פתרון:

א)

רפלקסיביות:

יהי $a \in \mathbb{R}$ לכן $a = a$ לכן aSa

אנטי-סימטריות:

נב״ש שקיימים $a \neq b \in \mathbb{N}$ כך ש$aSb \wedge bSa$ לכן

$b - a > 1 \wedge a - b > 1 \leftrightarrow b - a > 1 \wedge b - a < -1$ וזו סתירה

טרנזיטיביות:

יהי $(a,b),(b,c) \in S$ נחלק למקרים:

אם $a = b$:

מהנתון bSc ולכן aSc כנדרש

אם $b = c$:

מהנתון aSb ולכן aSc כנדרש

אחרת:

ידוע כי

$\begin{cases} b - a > 1 \\ c - b > 1 \end{cases}$ ולכן $c - a > 2 > 1$ כנדרש

ב)

בשביל שאיבר יהיה מינימלי צריך שלכל $b \neq a$ $b\not{R}a$ ולכן:

$a - b \leq 1 \Leftrightarrow a \leq b + 1$ ולכן:

נשים לב שכדי לצמצם הכי הרבה את הקבוצה ניקח $b = 0$ ולכן $a \leq 1$ ולכן $a = 0,1$

ג) נראה שלא קיים:

נביט בקבוצת חסמי המלעיל:

כל הx כך ש:

<u>אם $x = 0$</u>:

הוא לא חסם מלעיל כי $1 \ngtr 1 - 0$ ו$0 \neq 1$

<u>אם $x = 1$</u>:

הוא לא חסם מלעיל כי $1 \ngtr 2 - 1$ ו$2 \neq 1$

<u>אם $x = 2$</u>:

הוא לא חסם מלעיל כי $1 \ngtr 3 - 2$ ו$2 \neq 3$

<u>אם $x = 3$</u>:

הוא לא חסם מלעיל כי $3-2 \ngtr 1$ ו$2 \neq 3$

<u>אחרת</u>:

צריך ש$x-0>1, x-1>1, x-2>1, x-3>1$

כלומר ש$x>4$ ולכן $x \geq 5$

וכעת:

אם $x=5$ אז $5\not{R}6$ כי $6-5 \ngtr 1$ ו$5 \neq 6$

אם $x>5$ אז $x\not{R}5$ כי $5-x<0 \ngtr 1$

ולכן אין חסם עליון

5. (18 נק') תהי קבוצה A ותהיינה פונקציות $f, g \in A^A$.

א) הוכיחו או הפריכו: אם $f \circ g = g \circ f$, אזי f הפיכה.

ב) הוכיחו או הפריכו: אם f הפיכה, אזי $f \circ g = g \circ f$.

פתרון:

א) הפרכה

נבחר את $A = \mathbb{R}$ ואת הפונקציות הבאות:

הפונקציה הקבועה 0: $f(x) = 0$ ו-$g(x) = f(x) = 0$

כעת, ברור שהקבועה f אינה הפיכה, אבל לכל מספר ממשי מתקיים כי:

$$f \circ g = f \circ f = g \circ f$$

ב) הפרכה

נבחר שוב את $A = \mathbb{R}$ ואת הפונקציות הבאות: $f = x^3$ (שהיא כמובן הפיכה) וכן $g = \sin(x)$.

אבל ברור כי $(\sin(x))^3 \neq (\sin(x^3))$

6. (18 נק') קבעו והוכיחו עבור כל אחת מהקבוצות הבאות אם היא מעוצמה סופית, $\aleph_0$, א או $2^{\aleph}$. אם הקבוצה מעוצמה סופית, מצאו את העוצמה.

א) $A = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid Im(f) = \{0,1\}\}$.

ב) $B = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \exists a \in \mathbb{R}: Im(f) = \{a\}\}$.

פתרון:

א) טענה: $|A| = 2^{\aleph}$

הוכחה:

נשים לב שאלו בעצם הפונקציות העל מ $\mathbb{R}$ ל $\{0,1\}$

נביט בפונקציות ה**לא** על: (נסמנה ב A')

ישנן רק 2 פונקציות כאלה $f_1(x) := 1, f_0(x) := 0$ וכיוון שהאיחוד זר:

$2^{\aleph} = |\{0,1\}^{\mathbb{R}}| = |A| + |A'| = |A| + 2$ ולכן A אינסופית כי נניח בשלילה שהיא סופית לכן הסכום סופי סתירה.

לכן A אינסופית ולכן $|A| + 2 = |A|$ ולכן $|A| = 2^{\aleph}$

ב) נוכיח קודם טענת עזר: תהי פונקציה מהממשיים לעצמם

תמונה של פונקציה היא $\{a\}$ $\Leftrightarrow$ תמונה של פונקציה מוכלת ב$\{a\}$

הוכחה:

$\Leftarrow$

טריוויאלי כי $\{a\} \subseteq \{a\}$

$\Rightarrow$

כיוון שהתמונה מוכלת ב$\{a\}$ היא או $\{a\}$ או $\{\ \ \}$

אם היא $\{a\}$ סיימנו

אחרת התמונה היא קבוצה ריקה וכיוון שהפונקציה שלמה אז לדוגמא 1 נשלח לאנשהו וסתירה

(הערה: זה נכון לכל פונקציה מקבוצה שקיים בה איבר לקבוצה שקיים בה איבר)

ולכן:

$|B| = |\{a\}^{\mathbb{R}}| = 1^{\aleph} = 1$

את הפתרונות יש לכתוב במקומות המתאימים בדפים הבאים (אפשר לכתוב משני צידי הדף).