

שיעורי בית 1

13 בנובמבר 2016

1. הצג את התמורות הבאות באמצעות מחזורים זרים.

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{א})$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad (\text{ב})$$

פתרון: $a = (16)(25)(34), b = (12)(45)(36)$

2. חשבו: a^2, b^2, bab^{-1}, ab

פתרון: מכיוון שהצלחנו לפרק אותם למחזורים זרים מאורך שניים יתקיים $a = a^{-1} \quad b = b^{-1}$

$$ab = (153)(264) \quad bab^{-1} = bab = (14)(56)(32) \quad a^2 = b^2 = e$$

3. תהא $\sigma \in S_n$. ותהא $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_m$ ההצגה שלה כמכפלה של מחזורים זרים. הוכח כי

$$\sigma^{-1} = \tau_1^{-1} \cdots \tau_m^{-1} \quad (\text{א})$$

$$\sigma^k = \tau_1^k \cdots \tau_m^k \quad \text{לכל } k \text{ טבעי.} \quad (\text{ב})$$

פתרון: מתקיים כי $\sigma^{-1} = \tau_m^{-1} \cdots \tau_1^{-1} = id$ כי $\tau_1 \cdots \tau_m \tau_m^{-1} \cdots \tau_1^{-1} = id$. בנוסף, המספרים המופיעים ב τ_i הם אותם מספרים המופיעים ב τ_i^{-1} ולכן המחזורים $\tau_m^{-1}, \dots, \tau_1^{-1}$ זרים ולכן מתחלפים. ומכאן נקבל

$$\sigma^{-1} = \tau_m^{-1} \cdots \tau_1^{-1} = \sigma^{-1} = \tau_1^{-1} \cdots \tau_m^{-1}$$

בשיקול דומה, כיוון ש $\tau_1, \dots, \tau_m$ זרים הם מתחלפים ולכן אפשר לקבץ אותם. כלומר

$$\sigma^k = (\tau_1 \cdots \tau_m)(\tau_1 \cdots \tau_m) \cdots (\tau_1 \cdots \tau_m) = (\tau_1 \cdots \tau_1)(\tau_2 \cdots \tau_2) \cdots (\tau_m \cdots \tau_m) = \tau_1^k \cdots \tau_m^k$$

(ג) הראה שהשיוויון לעיל לא מתקיימים בהכרח בחבורה כללית. כלומר: תהא G חבורה. ויהא $g = x_1 \cdots x_m \in G$ מצא דוגמא המקיימות

$$g^{-1} \neq x_1^{-1} \cdots x_m^{-1} \quad \text{i.}$$

$$g^k \neq x_1^k \cdots x_m^k \text{ .ii}$$

פתרון: נתסכל על $(1, 2, 3) = (1, 2)(2, 3) \in S_3$ מתקיים

$$(1, 2, 3)^{-1} = (3, 2, 1) \neq (1, 2)^{-1}(2, 3)^{-1} = (1, 2)(2, 3) = (1, 2, 3)$$

וגם

$$(1, 2, 3)^2 = (1, 3, 2) \neq (1, 2)^2(2, 3)^2 = id$$

(ד) מצא את התנאים ששיויונות אלו כן יתקיימו, כלומר שכן מתקיים

$$g^{-1} = x_1^{-1} \cdots x_m^{-1} \text{ .i}$$

$$g^k = x_1^k \cdots x_m^k \text{ .ii}$$

פתרון: מספיק שהאברים $x_1, x_2, \dots, x_m$ יתחלפו זה עם זה.

עבור הסעיף השני, זה מיידי.

עבור הסעיף הראשון, נראה כי אם $x_1, x_2, \dots, x_m$ מתחלפים זה עם זה אז גם ההופכים. אכן אם $x_i x_j = x_j x_i$ אז אם נהפוך את שני הצדדים נקבל

$$x_j^{-1} x_i^{-1} = (x_i x_j)^{-1} = (x_j x_i)^{-1} = x_i^{-1} x_j^{-1}$$

.4

(א) הוכיחו כי עבור מחזור $(i_1, \dots, i_m) \in S_n$ מתקיים כי

$$(i_1, \dots, i_m) = (i_1, i_2)(i_2 i_3) \cdots (i_{m-1} i_m)$$

פתרון: נראה ששתי הפונקציות משני צדדי המשוואה שולחות כל $x \in \{1, \dots, n\}$ לאותו מקום. אכן, יהא $x \in \{1, \dots, n\}$.

אם $x = i_k$ (לאיזה שהוא $k < m$) אזי

$$(i_1, \dots, i_m)[i_k] = i_{k+1} = (i_k, i_{k+1})[x] = (i_1, i_2)(i_2 i_3) \cdots (i_{m-1} i_m)[x]$$

כי החילופים זרים (נובע מכך ש $(i_1, \dots, i_m)$ מחזור).

אם $x = i_m$ אזי

$$(i_1, \dots, i_m)[i_m] = i_1 = (i_1, i_2)[i_2] = (i_1, i_2)(i_2 i_3)[i_3] = \dots = (i_1, i_2)(i_2 i_3) \cdots (i_{m-1} i_m)[i_m]$$

אחרת $x \neq i_k$ לכל k ואז

$$(i_1, \dots, i_m)[x] = x = (i_1, i_2)(i_2 i_3) \cdots (i_{m-1} i_m)[x]$$

כי x מופיע במחזור מאורך 1

(ב) הסיקו כי כל תמורה $\sigma \in S_n$ ניתנת להצגה כמכפלה של חילופים. (הצגה זאת אינה יחידה. למשל $(1, 2) = (3, 4)(1, 2)(3, 4)$)
פתרון: תהא σ תמורה. אזי היא ניתנת להצגה כמכפלה של מחזורים זרים $\sigma = \prod_{i=1}^m \sigma_i$ ולכל i המחזור $\sigma_i = \prod_{j=1}^{m_i} \tau_{i,j}$ ניתן להצגה כמכפלה של חילופים לפי סעיף קודם ולכן גם

$$\sigma = \prod_{i=1}^m \sigma_i = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{m_i} \tau_{i,j}$$

ניתנת להצגה כמכפלה של חילופים.

5. הגדרה: תהא $\sigma \in S_n$ נגדיר $t = \#\{(i, j) : i < j, \sigma(j) < \sigma(i)\}$ להיות מספר היפוכי הסדר [אינדקסים (i, j) המקיימים כי $i < j$ וגם $\sigma(j) < \sigma(i)$] נקראים היפוך סדר. שימו לב כי בשאלה זו (i, j) זהו זוג סדר של האינדקסים i, j ולא תמורה. עוד נגדיר את הסימן של σ להיות

$$\text{sgn}(\sigma) = (-1)^t$$

כלומר הסימן של σ הוא -1 בחזקת מספר היפוכי הסדר, כלומר אם מספר היפוכי הסדר הוא זוגי הסימן שווה 1 ואם מספר היפוכי הסדר הוא אי זוגי אזי הסימן שווה ל -1 . למשל עבור $\sigma = (1, 2, 3)$ מתקיים כי הזוג הסדור $(1, 3)$ הוא היפוך סדר כי $1 < 3$ וגם $\sigma(3) < \sigma(1)$. גם הזוג הסדור $(2, 3)$ הוא היפוך סדר. שני אלו היפוכי הסדר היחידים ולכן $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^2 = 1$. התמורות שהסימן שלהם שווה 1 נקראות תמורות זוגיות ואילו תמורות שהסימן שלהם שווה -1 נקראות תמורות אי זוגיות.
תהא $\sigma \in S_n$ תמורה ויהא $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_m$ הצגה שלה כמכפלה של חילופים. הוכיחו כי מתקיים

$$\text{sgn}(\sigma) = (-1)^m$$

[למשל את $\sigma = (1, 2, 3)$ ניתן להציג כ $(1, 2)(2, 3)$ כלומר כמפלה של 2 חילופים ואכן $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^2$]

הדרכה: הוכיחו כי $\text{sgn}(\sigma_1 \sigma_2) = \text{sgn}(\sigma_1) \text{sgn}(\sigma_2)$

ע"י האבחנה כי $\#\{(i, j) : i < j, \sigma_1(j) < \sigma_1(i)\} = \#\{(\sigma_2(i), \sigma_2(j)) : \sigma_2(i) < \sigma_2(j), \sigma_1(\sigma_2(j)) < \sigma_1(\sigma_2(i))\}$
פתרון: נוכיח קודם כל כי $\text{sgn}(\sigma_1 \sigma_2) = \text{sgn}(\sigma_1) \text{sgn}(\sigma_2)$

נשים לב כי $\#\{(i, j) : i < j, \sigma_1(j) < \sigma_1(i)\} = \#\{(\sigma_2(i), \sigma_2(j)) : \sigma_2(i) < \sigma_2(j), \sigma_1(\sigma_2(j)) < \sigma_1(\sigma_2(i))\}$ ע"י החלפת (i, j) ב $(\sigma(i), \sigma(j))$ [שימו לב שכיוון ש σ הפיכה, אכן הקבוצות שוות]. כעת נגדיר

$$B = \{(\sigma_2(i), \sigma_2(j)) : \sigma_2(i) < \sigma_2(j), \sigma_1(\sigma_2(j)) < \sigma_1(\sigma_2(i))\} \text{ ואת } A = \{(i, j) : i < j, \sigma_2(j) < \sigma_2(i)\}$$

$$[(i, j) \in C \iff (\sigma(i), \sigma(j)) \in B \text{ כי } C = \{(i, j) : i < j, \sigma_1(j) < \sigma_1(i)\}]$$

ומכאן ש $A^c = \{(i, j) : i < j, \sigma_2(j) > \sigma_2(i)\}$ וגם $B^c = \{(\sigma_2(i), \sigma_2(j)) : \sigma_2(i) < \sigma_2(j), \sigma_1(\sigma_2(j)) > \sigma_1(\sigma_2(i))\}$ כעת ניגש להוכחה:

יהיו $(i, j) \in \{(i, j) : i < j, \sigma_1 \sigma_2(j) < \sigma_1 \sigma_2(i)\}$ אזי $i < j, \sigma_1 \sigma_2(j) < \sigma_1 \sigma_2(i)$. כעת ישנם 2 אפשרויות. אפשרות 1: $\sigma_2(j) < \sigma_2(i)$ ואפשרות 2: $\sigma_2(i) < \sigma_2(j)$.

באפשרות 1: נקבל כי $(i, j) \in A$ וגם $(\sigma_2(i), \sigma_2(j)) \in B^c$

באפשרות 2: נקבל כי $(i, j) \in A^c$ וגם $(\sigma_2(i), \sigma_2(j)) \in B$

לחילופין אם אפשרות 1 מתקיימת $(i, j) \in A$ וגם $(\sigma_2(i), \sigma_2(j)) \in B^c$ או אפשרות 2 מתקיימת כי $(i, j) \in A^c$ וגם $(\sigma_2(i), \sigma_2(j)) \in B$ אזי $(i, j) \in \{(i, j) : i < j, \sigma_1 \sigma_2(j) < \sigma_1 \sigma_2(i)\}$

מסקנה :

$$\{(i, j) : i < j, \sigma_1 \sigma_2(j) < \sigma_1 \sigma_2(i)\} = \{(i, j) : (i, j) \in A \wedge (\sigma(i), \sigma(j)) \in B^c\} \cup \{(i, j) : (i, j) \in A^c \wedge (\sigma(i), \sigma(j)) \in B\} = [A \cap C^c] \cup [A^c \cap C]$$

כעת מספיק להוכיח כי

$$\#[A \cup C] \cap [A^c \cup C^c] \equiv \#A + \#C$$

מודולו 2 (כלומר ששני צידי המשוואה זוגיים או ששניהם אי זוגיים).

$$\#[A \cup C] \cap [A^c \cup C^c] = \#[A \cup C] + \#[A^c \cup C^c] - \#[A \cup C] \cup [A^c \cup C^c]$$

$$= \#A + \#C - \#A \cap C + \#(A \cap C)^c - \#U \equiv \#A + \#C + \#A \cap C + \#(A \cap C)^c - \#U = \#A + \#U - \#U = \#A + \#C$$

לפני השלמת ההוכחה נציין שבאינדוקציה ניתן להוכיח כי $sgn(\prod_{i=1}^m \sigma_i) = \prod_i sgn(\sigma_i)$

ולהוכחת הטענה המרכזית: עבור חילוף $\tau = (i_1, i_2)$ מתקיים כי $sgn(\tau) = 1$ ולכן אם $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_m$ הצגה של σ כמכפלה של חילופים מתקיים כי

$$sgn(\sigma) = sgn(\prod_{i=1}^m \tau_i) = \prod_i sgn(\tau_i) = \prod_i (-1) = (-1)^m$$

6. עבור $\sigma \in S_n$ ומחזור $(i_1, i_2, \dots, i_m) \in S_n$ הוכח כי מתקיים השיויון הבא

$$\sigma(i_1, i_2, \dots, i_m) \sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_m))$$

למשל $\sigma = (1, 2)$ מתקיים כי

$$\sigma(2, 3, 5, 6) \sigma^{-1} = (1, 3, 5, 6)$$

פתרון : ע"י הכפלה מימין ב σ ומשמאל ב σ^{-1} שקול להוכיח כי

$$(i_1, i_2, \dots, i_m) = \sigma^{-1}(\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_m)) \sigma$$

יהא $x \in \{1, 2, \dots, n\}$ צריך להוכיח כי שתי הפונקציות (משני צידי השיויון) מעתיקות אותו לאותו מספר.

אם $x \in \{i_1, \dots, i_m\}$ אזי $x = i_k$ כלשהוא ואז

$$\sigma^{-1}(\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_m)) \sigma(i_k) = \sigma^{-1}(\sigma(i_{k+1})) = i_{k+1}$$

(אם $k = m$ אז נחליף את $m + 1$ ב-1)

ומצד שני

$$(i_1, i_2, \dots, i_m)(i_k) = i_{k+1}$$

ויש שיוויון.

אם $x \notin \{i_1, \dots, i_m\}$ אזי

$$\sigma^{-1}(\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_m))\sigma(x) = \sigma^{-1}\sigma(x) = x$$

התמורה $(\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_m))$ שולחת את $\sigma(x)$ לעצמו כי אחרת $\sigma(x) = \sigma(i_k)$ וכיוון שזוהי תמורה (בפרט חח"ע) זה גורר כי $x = i_k$ סתירה.

ומצד שני

$$(i_1, i_2, \dots, i_m)(x) = x$$

7. תרגיל מודרך: טענה קיימות $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ כך שכל $\sigma \in S_n$ ניתן להציג כמכפלה שלהם והופכיהם.

$$\text{כלומר } \sigma = \prod_{i=1}^N \tau_i \text{ כאשר לכל } i \text{ מתקיים } \tau_i \in \{\sigma_1, \sigma_1^{-1}, \sigma_2, \sigma_2^{-1}\}.$$

אנחנו נעבוד עם $\sigma_1 = (1, 2, 3, \dots, n), \sigma_2 = (1, 2)$.

(א) הראה כי כל חילוף מהצורה $(1, i)$ ניתן להציגו ע"י ע"י σ_1, σ_2 והופכיהן. (רמז: תרגיל 6 יכול להיות לעזר

פתרון: יהיה $(1, i)$ חילוף. מתקיים

$$\tau = \sigma_2 \sigma_1 = (2, 3, \dots, n) \text{ ואז } \tau^{i-2}(2) = i \text{ בנוסף } \tau^{i-2}(1) = 1.$$

$$\text{נסמן } \tau' = \tau^{i-2} \text{ ואזי לפי תרגיל 6 מתקיים } (\tau'(1), \tau'(2)) = (1, i). \tau' \sigma_2 (\tau')^{-1} = (\tau'(1), \tau'(2)) = (1, i).$$

(ב) הראה שכל חילוף (i, j) ניתן להביעו בעזרת $\{(1, k)\}_{k \geq 2}$

פתרון: מתקיים כי $(1, i)(1, j)(1, i) = (i, j)$

(ג) הוכח את הטענה.

פתרון: כל $\sigma \in S_n$ ניתן להציגה כמכפלה של חילופים. לפי סעיפים קודמים:

כל חילוף נביע בעזרת מכפלה של שתי חילופים $(i, k')(1, k)$.

כל מכפלה כזאת נביע באמצעות $(\tau')^{-1} \sigma_2 \tau'$ שזה אכן מכפלה שמעורבים בה רק תמורות מתוך $\{\sigma_1, \sigma_1^{-1}, \sigma_2, \sigma_2^{-1}\}$.