

## בוחן בדידה-פתרון



יוצרים: דן בן חנוך ועדי מכנס ה  
הערה: זה פתרון מלא, למעוניינים לראות את הרעיונות מוזמנים לעלעל בקובץ מחשבות על הבוחן של מכנסיים

1. נגדיר  $A_1 = \{1\}, B_1 = \{2\}$ . עוד נגדיר, לכל  $n$  טבעי, את הקבוצות

$$A_{n+1} = B_n \cup \{x + 2^n \mid x \in A_n\}$$

$$B_{n+1} = A_n \cup \{x + 2^n \mid x \in B_n\}$$

(א) (10 נקודות) כתבו מפורשות את הקבוצות  $A_2, B_2$ .

פתרון:

$$\begin{aligned} A_2 &= B_1 \cup \{x + 2^1 \mid x \in A_1\} = \{2\} \cup \{x + 2 \mid x \in \{1\}\} \\ &= \boxed{\{2, 3\}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2 &= A_1 \cup \{x + 2^1 \mid x \in B_1\} = \{1\} \cup \{x + 2 \mid x \in \{2\}\} \\ &= \boxed{\{1, 4\}} \end{aligned}$$

(ב) (20 נקודות) הוכיחו באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים כי

$$A_n \cup B_n = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 2^n\}$$

פתרון:

נוכיח את המבוקש באינדוקציה על  $n$ .

בסיס: אכן, עבור  $n = 1$  מתקיים כי:

$$A_1 \cup B_1 = \{1, 2\} = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 2\}$$

צעד: יהי  $n$  עבורו הטענה מתקיימת. נוכיח כי עבור  $n + 1$  הטענה מתקיימת גם כן. כלומר צ"ל:

$$A_{n+1} \cup B_{n+1} = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 2^{n+1}\}$$

אבל לפי הגדרת הקבוצות לעיל, מתקיים כי:

$$A_{n+1} \cup B_{n+1} =$$

$$(B_n \cup \{x + 2^n \mid x \in A_n\}) \cup (A_n \cup \{x + 2^n \mid x \in B_n\}) =$$

$$(A_n \cup B_n) \cup (\{x + 2^n \mid x \in A_n\} \cup \{x + 2^n \mid x \in B_n\}) =$$

$$(A_n \cup B_n) \cup \{x + 2^n \mid x \in A_n \cup B_n\}$$

מתכונות האיחוד ומהגדרתו. אבל מהנחת האינדוקציה נקבל כי:

$$= \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 2^n\}$$

$$\cup \{x + 2^n \mid x \in \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 2^n\}\}$$

ולמעשה, קל לראות כי מכיוון ש:

$$1 \leq x \leq 2^n$$

אזי:

$$2^n + 1 \leq x + 2^n \leq 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

ולכן ניתן לכתוב את הנ"ל בצורה קריאה יותר לעיני הקוראים  
והבודקים:

$$= \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 2^n\}$$

$$\cup \{x \in \mathbb{N} \mid 2^n + 1 \leq x \leq 2^{n+1}\}$$

והרי:

$$= \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 2^{n+1}\}$$

משל ■.

(ג) (20 נקודות) הוכיחו כי מתקיים

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{N}$$

פתרון:

נוכיח את המבוקש בעזרת הכלה זו כיוונית.

☐ ברור. כל המספרים ב  $A_n$  טבעיים, למה שיהיה איבר לא טבעי  
באיחוד?<sup>1</sup>

☐ יהי  $n \in \mathbb{N}$ . צריך למצוא קבוצה (ליתר דיוק אינדקס  $k$ ) כך ש  
 $n \in A_k$ .

ראשית, קל לראות (ולהוכיח באינדוקציה כ"כ) כי:

$$1 \leq n \leq 2^n$$

לכל  $n \in \mathbb{N}$ . לפיכך:

$$n \in \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 2^x\}$$

$$\in \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 2^n\} \stackrel{(א.1)}{=} A_n \cup B_n$$

כעת נחלק למקרים.

אם  $n \in A_n$  נבחר  $k = n$  וסיימנו.

אחרת,  $n \in B_n$ . לפיכך נשים לב כי:

<sup>1</sup> (למה לא בעצם?) תודה ל @שקד~♦.

$$n \in B_n \subseteq A_{n+1}$$

ולכן אם נבחר  $k = n + 1$  נקבל הדרוש.  
משל ■.

פתרון נוסף של אייל בראונשטיין ה־Σ:

נשים לב כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$\begin{aligned} n &\in \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 2^n\} \\ &= A_n \cup B_n \\ &\subseteq A_n \cup A_{n+1} \\ &\subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \end{aligned}$$

2. (20 נקודות לכל סעיף) נסמן  $S = \{1, 2, \dots, 100\}$  ונגדיר יחס  $R$  על

$$P(S \times S)$$

כך: לכל  $A, B \subseteq S \times S$  מתקיים  $ARB$  אם ורק אם

$$[\forall (x, y) \in A \exists s \in S: (x, s) \in B]$$

$$\wedge [\forall (x, y) \in B \exists s \in S: (x, s) \in A]$$

הוכיחו:

(א)  $R$  הוא יחס שקילות על  $P(S \times S)$ .

**פתרון:**

**רפלקסיביות:**

מתקיים  $ARA$  כי:

לכל זוג סדור  $(x, y) \in A$  קיים  $s = y$  כך ש  $(x, y) \in A$  ואותו דבר לצד השני

**סימטריות:**

אם  $ARB$  לכן:

$$[\forall (x, y) \in A \exists s \in S: (x, s) \in B]$$

$$\wedge [\forall (x, y) \in B \exists s \in S: (x, s) \in A]$$

ולכן:

$$[\forall (x, y) \in B \exists s \in S: (x, s) \in A]$$

$$\wedge [\forall (x, y) \in A \exists s \in S: (x, s) \in B]$$

ולכן  $BRA$

**טרנזיטיביות:**

אם  $ARB$  ו  $BRC$  אז:

$$[\forall (x, y) \in A \exists s \in S: (x, s) \in B]$$

$$\wedge [\forall (x, y) \in B \exists s \in S: (x, s) \in A]$$

$$[\forall (x, y) \in B \exists s \in S: (x, s) \in C]$$

$$\wedge [\forall (x, y) \in C \exists s \in S: (x, s) \in B]$$

ולכן:

יהי  $(x, y) \in A$  לכן קיים  $s_1$  כך ש  $(x, s_1) \in B$  לכן קיים  $s_2$  כך

ש  $(x, s_2) \in C$  ולכן הוכחנו את הצד הזה

נוכיח את הצד השני:

יהי  $(x, y) \in C$  לכן קיים  $s_1$  כך ש  $(x, s_1) \in B$  לכן קיים  $s_2$  כך

ש  $(x, s_2) \in A$  ולכן ניצחנו!

(א) הוכיחו: לכל שני יחסי סדר (חלקיים)  $T_1, T_2$  על הקבוצה  $S$  מתקיים כי

$$[T_1]_R = [T_2]_R$$

**פתרון:**

בעצם, לפי משפט מההרצאה מספיק להראות ש:

$$T_1 R T_2$$

יהי  $(x, y) \in T_1$  לכן מרפליקסיביות  $(x, x) \in T_2$  ולכן ניקח  $s = x$  ואכן מתקיים

(ב) מצאו את גודל קבוצת המנה. כלומר, מצאו כמה איברים (שונים) יש

$$P(S \times S)/_R$$

**פתרון:**

טענה:

$$[\emptyset]_R = \{\emptyset\}$$

הוכחה: לכל קבוצה שאינה ריקה, היחס עם הריקה לא מתקיים, שכן לא קיים אף איבר שנמצא בקבוצה הריקה – ולפיכך היחס לא מתקיים.

טענה:

תהי  $A \neq \emptyset \subseteq S$ . אזי לכל קבוצה  $X \neq \emptyset$  מתקיים כי:

$$[A \times X]_R = \{A \times Y \mid Y \neq \emptyset\}$$

הוכחה:

$\supseteq$  תהי  $A \times Y$  כנ"ל. נוכיח כי  $(A \times X)R(A \times Y)$ . נוכיח פסוק אחד מהיחס, השני די זהה.

יהי  $(a, x) \in A \times X$  (קיים כזה כי שתי הקבוצות לא ריקות). יש למצוא  $y \in Y$  כך שמתקיים כי  $(a, y) \in A \times Y$ . אבל אכן קיים כזה משום ש  $Y \neq \emptyset$ .

$\subseteq$  תהי  $C \in [A \times X]_R$ , נראה שהיא מהצורה  $A \times Y$ . כמובן  $C \neq \emptyset$

לפי מה שהסברנו קודם לכן. נסמן:  $C = D \times E$  וצ"ל ש  $A = D$ . יהי  $d \in D$ . קיים זוג סדור  $(d, e) \in C$  שכן  $E$  אינה ריקה (שכן אחרת  $C$  ריקה). אבל  $(D \times E)R(A \times X)$  ולכן קיים  $x \in X$  כך שנקבל כי  $(d, x) \in A \times X$ , ולכן  $d \in A$ . באופן סימטרי (משחק מילים) ההכלה בכיוון השני דומה, וביחד נקבל כי  $D = A$  כפי שביקשנו.

לפיכך, מחלקת השקילות של מכפלה קרטזית  $A \times B$  תלוי אך ורק ב  $A$ . לכן כמות מחלקות השקילות היא כמות הקבוצות  $A \in P(S)$ . אבל כמה קבוצות כאלו יש?  $|P(S)| = 2^{|S|} = 100$  ולכן יש בקבוצת המנה  $2^{100}$  איברים בדיוק.