בוחן בדידה קיץ תשפא-פתרון

26.7.2021 , י"ז אב תשפ"א

מתרגלים: אחיה בר-און, תמר בר-און, גיא ברגר, עוזי חרוש, עידו פלדמן, נעם פרץ, גלעד פורת קורן, הראל רוזנפלד.
הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- משך הבוחן: שעה ורבע.
- ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי- מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- ניקוד מקסמאלי: 120 נקודות.

.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה!

1. (15 נקודות לסעיף) תהא X קבוצה. תת קבוצה $\mathcal{S} \subseteq P(X)$ תקרא "מאחדת-משלימה" אם:

- $\mathcal{S}$ אינה ריקה.
- היא סגורה לאיחודים: לכל שתי קבוצות $A, B \in \mathcal{S}$ מתקיים כי $A \cup B \in \mathcal{S}$.
- היא סגורה למשלים: לכל קבוצה $A \in \mathcal{S}$ מתקיים כי $A^c \in \mathcal{S}$ (כאשר $A^c = X \backslash A$).

תהיינה $\mathcal{S}, \mathcal{T} \subseteq P(X)$ שתי מאחדות-משלימות. ענו על הסעיפים הבאים:

(א) הוכיחו כי $\emptyset \in \mathcal{S}$ וגם $X \in \mathcal{S}$.
פתרון: כיוון ש $\mathcal{S}$ לא ריקה, קיימת $A \in \mathcal{S}$. מכיוון ש $\mathcal{S}$ סגורה למשלים, גם $A^c \in \mathcal{S}$. ומכיוון ש $\mathcal{S}$ סגורה לאיחודים, נקבל שגם $X = A \cup A^c \in \mathcal{S}$. ושוב, כיוון ש $\mathcal{S}$ סגורה למשלים, נקבל ש $\emptyset = X^c \in \mathcal{S}$.

(ב) הוכיחו כי $\mathcal{S}$ סגורה לחיתוכים. כלומר: לכל שתי קבוצות $A, B \in \mathcal{S}$ מתקיים כי $A \cap B \in \mathcal{S}$.
פתרון: תהיינה $A, B \in \mathcal{S}$. כיוון ש $\mathcal{S}$ סגורה למשלים, גם $A^c, B^c \in \mathcal{S}$. מכיוון ש $\mathcal{S}$ סגורה לאיחודים נקבל ש $A^c \cup B^c \in \mathcal{S}$ ומכיוון ש $\mathcal{S}$ סגורה למשלים נקבל (דה מורגן)

$$A \cap B = (A^c)^c \cap (B^c)^c = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{S}$$

כנדרש.

(ג) <u>הוכיחו או הפריכו</u>: גם החיתוך $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ הוא קבוצה מאחדת-משלימה.
פתרון: הוכחה: לפי סעיף ראשון, נקבל כי $\emptyset \in \mathcal{S}$ וגם $\emptyset \in \mathcal{T}$ ולכן $\emptyset \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$. בפרט $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ לא ריקה.

- סגירות לחיתוכים: תהיינה $A, B \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ אזי $A, B \in \mathcal{S}$ וגם $A, B \in \mathcal{T}$ ומכיוון ש $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ סגורות לאיחודים נקבל כי $A \cup B \in \mathcal{S}$ וגם $A \cup B \in \mathcal{T}$ ולכן $A \cup B \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$
- סגירות למשלים: תהא $A \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ אזי $A \in \mathcal{S}$ וגם $A \in \mathcal{T}$ ומכיוון ש $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ סגורות למשלים נקבל כי $A^c \in \mathcal{S}$ וגם $A^c \in \mathcal{T}$ ולכן $A^c \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$

(ד) <u>הוכיחו או הפריכו</u>: גם האיחוד $\mathcal{S} \cup \mathcal{T}$ הוא קבוצה מאחדת-משלימה.
פתרון: הפרכה: נגדיר $X = \{1, 2, 3\}$ ו

$$\mathcal{S} = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2, 3\}\}$$
$$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{3\}, \{1, 2\}\}$$

אזי $\mathcal{S}, \mathcal{T}$מאחדות-משלימות כי שתיהן מהצורה $\{\emptyset, X, A, A^c\}$ (ב $\mathcal{S}$ זה $A = \{1\}$ וב $\mathcal{T}$ זה $A = \{3\}$) וקל לוודא שזה אכן קבוצה מאחדת-משלימה. אבל

$$\mathcal{S} \cup \mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2, 3\}, \{3\}, \{1, 2\}\}$$

אינה מאחדת-משלימה כי היא, למשל, אינה סגורה לאיחודים, שהרי $\{1\}, \{3\} \in \mathcal{S} \cup \mathcal{T}$ אבל $\{1, 3\} = \{1\} \cup \{3\} \notin \mathcal{S} \cup \mathcal{T}$.

2. (20 נקודות לסעיף) הגדרה: עבור a, b ממשיים, נגדיר את הקטע הסגור $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\}$.
תהא $A \subseteq \mathbb{N}$. נגדיר יחס על $A^c = \mathbb{N} \backslash A$ כך

$$(m \sim n) \iff (B_{m,n} \cap A = \emptyset)$$

כאשר $B_{m,n} = [m, n] \cup [n, m]$.

(א) הוכיחו כי $\sim$ הוא יחס שקילות על A^c.
פתרון: נוכיח ישירות:

- רפלקסיביות: לכל $n \in A^c$ מתקיים כי

$$B_{n,n} = [n, n] \cup [n, n] = \{n\}$$

ולכן $B_{n,n} \cap A = \{n\} \cap A = \emptyset$ שהרי $n \in A^c$.

- סימטריות: נניח $m, n \in A^c$ כך ש $m \sim n$ (צ"ל $n \sim m$). מההנחה $B_{m,n} \cap A = \emptyset$ ומכיוון ש $B_{m,n} = B_{n,m}$ (שהרי

$$B_{m,n} = [m, n] \cup [n, m] = [n, m] \cup [m, n] = B_{n,m}$$

ואיחוד קבוצות הוא סימטרי) נקבל שגם $B_{n,m} \cap A = \emptyset$. מה שגורר, לפי הגדרה, כי $n \sim m$.

- טרנזיטיביות: נניח $m,n,k\in A^c$ כך ש $m\sim n$ וגם $n\sim k$ (צ"ל $m\sim k$). מההנחה נקבל כי $B_{m,n}\cap A=\emptyset$ וגם $B_{n,k}\cap A=\emptyset$. ולכן

$$(B_{m,n}\cup B_{n,k})\cap A=(B_{m,n}\cap A)\cup(B_{n,k}\cap A)=\emptyset\cup\emptyset=\emptyset$$

אבל נשים לב ש:

  - אם n בין m ל k (כלומר $m\le n\le k$ או $k\le n\le m$) נקבל ש

$$\begin{aligned}B_{m,n}\cup B_{n,k}&=[m,n]\cup[n,m]\cup[n,k]\cup[k,n]\\&=([m,n]\cup[n,k])\cup([k,n]\cup[n,m])\\&=[m,k]\cup[k,m]\\&=B_{m,k}\end{aligned}$$

  - אחרת $n<m,k$ או $m,k<n$.
    במקרה ש $n<m,k$ נקבל ש $n<m,k\le\max\{m,k\}$ ולכן

$$B_{m,k}=[\min\{m,k\},\max\{m,k\}]\subseteq[n,\max\{m,k\}]=B_{n,m}\cup B_{n,k}=B_{m,n}\cup B_{n,k}$$

    ובמקרה ש $m,k<n$ נקבל (באופן דומה) $\min\{m,k\}<n$ ולכן

$$B_{m,k}=[\min\{m,k\},\max\{m,k\}]\subseteq[\min\{m,k\},n]=B_{m,n}\cup B_{k,n}=B_{m,n}\cup B_{n,k}$$

בכל מקרה קיבלנו ש $B_{m,k}\subseteq B_{m,n}\cup B_{n,k}$ ולכן

$$\emptyset\subseteq(B_{m,k}\cap A)\subseteq((B_{m.n}\cup B_{n,k})\cap A)=\emptyset$$

ולכן $B_{m,k}\cap A=\emptyset$ מה שאומר ש $m\sim k$ כנדרש.

(ב) מצאו A עבורה מספר האיברים בקבוצת המנה, $^{A^c}/_{\sim}$, הוא 3 וכל מחלקת שקילות בת 4 איברים בדיוק.
פתרון: נגדיר

$$A=\{5,10,15\}\cup\{n\in\mathbb{N}\,|\,n\ge16\}$$

ואז

$$A^c=\{1,2,3,4,6,7,8,9,11,12,13,14\}$$

ואז: $m,n\in A^c$ מקיימים $m\sim n$ אמ"מ

$$([m,n]\cup[n,m])\cap A=\emptyset$$

כלומר, בהנחה ש $m\le n$ (אם $n\le m$ החישובים דומים) נקבל כי

$$[m,n]\subseteq A^c$$

מה שמחייב ש $m,n\in\{1,2,3,4\}$ או $m,n\in\{6,7,8,9\}$ או $m,n\in\{11,12,13,14\}$ ולכן מחלקות השקילות הן:

$$\begin{aligned}[1]&=\{1,2,3,4\}\\ [6]&=\{6,7,8,9\}\\ [11]&=\{11,12,13,14\}\end{aligned}$$

שזה אומר שקבוצת המנה $^{A^c}/_{\sim}=\{[1],[6],[11]\}$ יש 3 איברים שכל אחת בת 4 איברים בדיוק כנדרש.

(ג) **אין קשר לסעיף קודם**.
לכל k טבעי נגדיר את הקבוצה

$$A_k=kA=\{ka\,|\,a\in A\}$$

ונגדיר, באופן דומה, את היחס R_k על A_k^c כך

$$(m,n)\in R_k\iff(B_{m,n}\cap A_k=\emptyset)$$

כאשר $B_{m,n}$ הוגדר בראש השאלה. הוכיחו: אם $A \neq \emptyset$ אז $\cup_{k\in\mathbb{N}}R_k$ הוא יחס שקילות על $\mathbb{N}$.
פתרון: נניח כי $A \neq \emptyset$ ונוכיח כי ש $\cup_{k\in\mathbb{N}}R_k$ יחס שקילות על ידי שנראה כי $\cup_{k\in\mathbb{N}}R_k = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$:

$(\subseteq)$ ברור מהגדרה. $(\supseteq)$ יהא $(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. כיוון ש A לא ריקה, נסמן ב $x \in A$ את האיבר הקטן ביותר בקבוצה. מכיוון ש A ת"ק של הטבעיים נקבל כי $1 \leq x$ ולכן האיבר הקטן ביותר ב A_k הוא kx ‏$k \leq$ (לכל k טבעי). נסמן

$$K = \max\{m,n\} + 1$$

ונקבל כי $m,n < K \leq \min A_K$ ולכן $B_{m,n} \cap A_k = \emptyset$ ולכן $(m,n) \in R_K$ ובפרט

$$(m,n) \in \cup_{k\in\mathbb{N}}R_k$$

כנדרש.