מקליד: עידן אריה
מרצה: פרופ' עידו דגן
תאריך: 2015-10-25

מודלים הסתברותיים יישומיים במדעי המחשב
89-919-01

אתר הקורס - http://u.cs.biu.ac.il/~89-919/

נוסחת בייס Bayes

מטרה: חישוב $P(E|F)$ כשקל יותר לחשב $P(F|E)$

לפי הגדרת הסתברות מותנית: $P(EF) = P(E|F)P(F) = P(F|E)P(E)$

הצורה הבסיסית

$$P(E|F) = \frac{P(F|E)P(E)}{P(F)}$$

$$P(F) = P(EF) + P(\overline{E}F) = P(F|E)P(E) + P(F|\overline{E})P(\overline{E})$$

$$P(E|F) = \frac{P(F|E)P(E)}{P(F|E)P(E) + P(F|\overline{E})P(\overline{E})}$$

הנוסחה הכללית

בהינתן קבוצת מאורעות זרים $E_1, E_2, \ldots E_n$ שפורשים את S $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i = S$ נקבל:

$$P(F) = \sum_{i=1}^{n} P(FE_i) = \sum_{i=1}^{n} P(F|E_i) \cdot P(E_i)$$

נציב בנוסחת בייס:

$$P(E_i|F) = \frac{P(F|E_i)P(E_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(F|E_j)P(E_j)}$$

דוגמה

מכתב נמצא באחת מתוך 3 תיקיות, בהסתברות שווה. כשמחפשים את המכתב בתיקיה שבה הוא נמצא ההסתברות למצוא אותו היא α. מה הסיכוי שהמכתב בכל זאת נמצא בתיקיה הראשונה למרות שסרקנו אותה ולא מצאנו את המכתב?

נסמן: E_i המכתב בתיקיה i.
F סרקנו את התיקיה הראשונה ולא מצאנו את המכתב

$$P(E_1|F) = \frac{P(F|E_1)P(E_i)}{\sum\limits_{i=1}^{3} P(F|E_i)P(E_i)} = \frac{(1-\alpha)\cancel{1}/\cancel{3}}{(1-\alpha)\cancel{1}/\cancel{3} + 1 \cdot \cancel{1}/\cancel{3} + 1 \cdot \cancel{1}/\cancel{3}} = \frac{1-\alpha}{3-\alpha}$$

מקליד: עידן אריה
מרצה: פרופ' עידו דגן
תאריך: 2015-10-25

מודלים הסתברותיים יישומיים במדעי המחשב
89-919-01

משתנים מקריים

מוטיבציה: פעמים רבות לא מתעניינים ישירות בתוצאת הניסוי, אלא בפונקציה שלה.

לדוגמה: מה סכום הטלת זוג קוביות. למשל: $P\left(\overbrace{f}^{\text{sum}}(\langle d_1, d_2\rangle) = 7\right)$.

לפונקציה כזו נקרא משתנה מקרי:

הגדרה: משתנה מקרי(מ"מ)

פונקציה ממרחב המדגם לערך כלשהו(מטווח מוגדר של הפונקציה).

נסמן: X המשתנה המקרי
$x \in X$ ערך אפשרי של המ"מ

נשים ♡: מאחר שהערך x של X נקבע על פי תוצאות הניסוי, ניתן לייחס לו הסתברות: סכום ההסתברויות של כל תוצאות הניסוי שעבורן ערך הפונקציה הוא x.

נסמן[1]:

$$p(x) = P(X = x)$$

בדוגמת זוג הקוביות:

$$p(7) = \frac{6}{36} \qquad p(2) = p(12) = \frac{1}{36}$$

טווח הפונקציה הוא $\{2, \dots 12\}$. כל זוג מאורעות עבורם ערך הפונקציה שונה הם זרים(כי זו פונקציה ולכן היא חד ערכית). לכן:

$$P\left\{\bigcup_{i=2}^{12}\{X = i\}\right\} = \sum_{i=1}^{12} P(\{X = i\}) = \sum_{i=2}^{12} p(i) = 1$$

באופן כללי:

סכום ההסתברויות לכל הערכים האפשריים של משתנה מקרי הוא 1

הגדרה - משתנה מקרי בדיד ורציף

משתנה מקרי בדיד: סט הערכים האפשריים סופי או בר מנייה(כגון $1, 2, \dots \infty$)

משתנה מקרי רציף: המשתנה יכול לקבל טווח רציף של ערכים(כגון מספר ממשי). לדוגמה: גובה של אדם

למשתנה בדיד קיימת פונקציית הסתברות $p(x)$ שמגדירה ערך הסתברותי לכל ערך אפשרי של X. נקראת פונקציית מסת ההסתברות(Probability Mass Function)

לקבוצת ההסתברויות שמגדירה את הפונקציה $p(x)$: $\{p(x_i)\}$ נקרא הפרמטרים של התפלגות X

---

[1] למשתנה בדיד. עבור משתנים רציפים ההסתברות של ערך בודד(או של כל קבוצה בת מנייה של ערכים בודדים) היא 0

הגדרה - מ"מ ברנולי

מ"מ ברנולי מוגדר עבור ניסוי שיש לו שתי תוצאות אפשריות. נגדיר פונקציית מ"מ:

- לתוצאה אחת נקרא הצלחה ועבורה $X=1$
- לתוצאה שנייה נקרא כישלון ועבורה $X=0$

נסמן: $p(0)=1-p \qquad p(1)=p$

הגדרה - מ"מ בינומי

מ"מ בינומי מוגדר עבור ניסוי של סדרה של n ניסויי ברנולי. ערך המ"מ X - מספר ההצלחות(1-ים) בניסוי ההסתברות לערך מסויים של X(מתוך הטווח $0,\dots n$): נוסחת הבינום:

$$p(x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$$

הגדרה - תוחלת של מ"מ(Expected Value)

אינטואיטיבית: ממוצע משוקלל של ערכי X, משוקללים בהסתברויות שלהם:

$$E[X]=\sum_{\underbrace{x\in X}_{x:p(x)>0}} x\cdot p(x)$$

דוגמאות: מ"מ של הטלת קוביה בודדת:

$$E[X]=\frac{1}{6}\cdot\left(\underbrace{1+1+\cdots 1}_{\text{6 times}}\right)=3.5$$

מ"מ של סכום זוג קוביות:

$$E[X]=2\cdot\frac{1}{36}+3\cdot\frac{2}{36}+\cdots+7\cdot\frac{6}{36}+\cdots+12\cdot\frac{1}{36}$$

משתנה ברנולי:

$$E[X]=1\cdot p+0(1-p)=p$$

משתנה בינומי:

$$E[X]=\sum_{i=0}^{n} i\cdot p(i)=\sum_{i=0}^{n} i\cdot\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}=n\cdot p$$

הגדרה - תוחלת של פונקציה($g\left(x\right)$) על מ"מ

לדוגמה: X-הטלת קוביה, $g\left(x\right)=x^{2}$

נסתכל על $g\left(X\right)$ כמשתנה מקרי חדש, שבו ההסתברות לכל ערך $g\left(x\right)$ היא $p\left(x\right)$, ולכן:

$$E\left[g\left(x\right)\right]=\sum_{x\in X}g\left(x\right)\cdot p_{X}\left(x\right)$$

למשל - הגדרת שונות:

$$\text{Var}\left(X\right)=E\left[\left(X-E\left[X\right]\right)^{2}\right]$$

הגדרה - התפלגות משותפת של מ"מ

מוטיבציה: מידול תופעה שעבורה מחושבים מספר משתנים מקריים בניסוי, ומתעניינים בהסתברות של צירוף ערכים מסויים(כל צירוף אפשרי).

הסתברות משותפת למשתנים X,Y מגדירה ערך הסתברות לכל זוג אפשרי של ערכים $x\in X,y\in Y$:

$$p\left(x,y\right)=P\left(\left\{ X=x,Y=y\right\} \right)$$