

תרגיל בית 5

שאלה 1

הגדרה: יהי $(X, \|\cdot\|)$ מרחב נורמי. נאמר ש- $A \subseteq X$ חסומה בנורמה אם קיים $0 < M \in \mathbb{R}$ כך ש- $\|x\| \leq M$ $\forall x \in A$.

תהיינה $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ נורמות שקולות מעל מרחב וקטורי X (כלומר קיימים $a, b > 0$ כך שלכל $x \in X$, $\|x\|_1 \leq a\|x\|_2 \wedge \|x\|_2 \leq b\|x\|_1$).

א. תהי A חסומה ב- $(X, \|\cdot\|_1)$. הוכיחו ש- A חסומה ב- $(X, \|\cdot\|_2)$.

ב. תהי A חסומה ב- \mathbb{R}^2 עם המטריקה האוקלידית. האם A חסומה בהכרח

ב- (\mathbb{R}^2, d_{\max}) ? הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית.

ג. תהי d מטריקה שקולה למטריקה האוקלידית ונניח ש- A חסומה ב- (\mathbb{R}^2, d) . האם A חסומה בהכרח ב- (\mathbb{R}^2, d_{\max}) ? הוכיחו או הפריכו ע"י

דוגמה נגדית.

שאלה 2

תהי X קבוצה נתבונן באוסף $T_\infty = \{U \subseteq X : X - U \text{ is infinite}\} \cup \{\emptyset, X\}$ (כלומר כל תתי הקבוצות של X בעלות משלים אינסופי, יחד עם הקבוצה עצמה והמרחב כולו). הוכיחו/הפריכו: T_∞ מהווה טופולוגיה על X .

שאלה 3

א. נתבונן ב- \mathbb{R} ובתת קבוצה שלו $S = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$. נאמר ש- $C \subseteq \mathbb{R}$ היא

קבוצה סגורה אם $C = A \cup T$ כאשר: A היא תת קבוצה סגורה של \mathbb{R}

בטופולוגיה האוקלידית, ו- T היא תת קבוצה כלשהי של S . הוכיחו שהמשלימים של הקבוצות הסגורות הללו יוצרים טופולוגיה על \mathbb{R} .
הדרכה: קודם כל, תוכיחו שזאת טופולוגיה ע"י כך שתראו את שלוש התכונות על קבוצות סגורות (ולא הפתוחות). שנית, כאשר תבדקו שחיתוך כלשהו של קבוצות סגורות הוא סגור, היעזרו בכך שמתקיים:

$$C = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup T_i) = \bigcap_{i \in I} A_i \cup \left(C \setminus \bigcap_{i \in I} A_i \right)$$

ב. נתבונן בקבוצת המספרים השלמים \mathbb{Z} ולכל $n \in \mathbb{Z}$ נגדיר $O_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$. נסמן $\tau = \{\emptyset, \mathbb{Z}\} \cup \{O_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. הוכיחו:

1. (\mathbb{Z}, τ) מרחב טופולוגי.

2. (\mathbb{Z}, τ) אינו מטרזבילי.

שאלה 4

תזכורת:

תהי Y קבוצה כלשהי, ותהי $p \notin Y$ ויהי $X = \{p\} \cup Y$. נגדיר

$$\tau = \{O \subseteq X : p \notin O \vee |O^c| \leq \aleph_0\}$$

א. הוכיחו ש- (X, τ) הוא מרחב טופולוגי.

ב. נניח ש- $|X| \leq \aleph_0$. הוכיחו כי $\tau = \tau_{disc}$.

ג. בתנאי סעיף ב', האם (X, τ) מטרזבילי?

שאלה 5

נתבונן בשני אוספים של תתי קבוצות של \mathbb{N} : $\tau_1 = \{U \subseteq \mathbb{N} : U = \emptyset \vee |U^c| < \infty\}$,

$$\tau_2 = \{U \subseteq \mathbb{N} : 1 \notin U \vee |U^c| < \infty\}$$

א. הוכיחו ש- τ_1, τ_2 הן טופולוגיות על \mathbb{N} .

ב. נתבונן בשתי פונקציות $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ כאשר $f = Id_{\mathbb{N}}$,

$$g(n) = \begin{cases} 1 & n \text{ גי} \\ 1 + \frac{n}{2} & n \text{ זוגי} \end{cases}$$

האם הפונקציות הבאות רציפות (הוכיחו את תשובתכם!)

1. $f: (\mathbb{N}, \tau_1) \rightarrow (\mathbb{N}, \tau_2)$

2. $f: (\mathbb{N}, \tau_2) \rightarrow (\mathbb{N}, \tau_1)$

3. $g: (\mathbb{N}, \tau_1) \rightarrow (\mathbb{N}, \tau_2)$

4. $g: (\mathbb{N}, \tau_2) \rightarrow (\mathbb{N}, \tau_1)$

שאלה 6

תזכורת

נתבונן ב- \mathbb{R} עם הטופולוגיה T הבאה:

קבוצה היא פתוחה אם היא איחוד של קבוצות מהצורה $[a, b)$ (זהו הישר של סורגנפריי).

א. הוכיחו כי T אכן טופולוגיה.

ב. הוכיחו שהטופולוגיה הרגילה על \mathbb{R} , שנסמנה להלן ב τ (המתקבלת ע"י המטריקה הרגילה), מקיימת $\tau \subset T$ (הכלה אמיתית!).

ג. הוכיחו שהסדרה $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ מתכנסת בטופולוגיה של סורגנפריי.

שאלה 7

תהי $p \notin \mathbb{R}$ ויהי $X = \{p\} \cup \mathbb{R}$, תהי $\tau = \{O \subseteq X : p \notin O \vee |O^c| \leq \aleph_0\}$.

א. יהי Y מ"ט כלשהו. תהי $f: (X, \tau) \rightarrow Y$ פונקציה, ותהי

$\{x_n\} \subseteq X$ סדרה מתכנסת: $x_n \xrightarrow{\tau} x \in X$. הוכיחו ש-

$$f(x_n) \rightarrow f(x)$$

ב. מצאו דוגמה למרחב טופולוגי מטריזבילי Y , ופונקציה

$$g: (X, \tau) \rightarrow Y$$
 שאינה רציפה.

ג. הסיקו משני הסעיפים הקודמים שהמרחב (X, τ) אינו

מטריזבילי.

שאלה 8

א. תהי X קבוצה אינסופית, ו- τ טופולוגיה על X הכוללת את

כל תתי הקבוצות האינסופיות (אך לא בהכרח רק את אלה).

הראו ש- (X, τ) היא הטופולוגיה הדיסקרטית.

ב. יהי X מצוייד בטופולוגיה הקו-סופית. נניח שקיימות במרחב לפחות 3

קבוצות סגורות. הראו ש- X סופית.

ג. תהי X קבוצה אינסופית, ו- τ טופולוגיה על X עם התכונה הבאה:

הקבוצה האינסופית היחידה שהיא פתוחה היא X עצמה. האם τ היא

בהכרח הטופולוגיה הטריטוריאלי? נמקו את תשובתכם.

בהצלחה!