

תרגיל 4

8 באפריל 2019

1. תהי $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ פרמטריזציה חלקה Γ ב \mathbb{R}^2 בעלת וקטור משיק באורך יחידה T ווקטור נורמל N המוגדרים על ידי

$$T(\gamma(t)) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t))$$
$$N(\gamma(t)) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} (\gamma'_2(t), -\gamma'_1(t))$$

בהינתן שדה וקטורי $F = (F_1, F_2)$ יהי $\omega = -F_2 dx + F_1 dy$ הראו שמתקיים

$$\int_{\gamma} F \cdot N ds = \int_{\gamma} \omega$$

2. יהי $p \in \mathbb{R}^2$ ויהי $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ שדה וקטורי המוגדר על ידי

$$F(x) = \nabla \log \|x - p\|^2$$

יהי C מעגל עם מרכז p מכוון נגד כיוון השעון. הראו על ידי חישוב ישיר (או בכל דרך אחרת) שמתקיים:

$$\int_C F \cdot N ds = 4\pi$$

כאשר $F \cdot N$ מוגדר כמו בתרגיל הקודם.

3. תהי C עקומה חלקה ב \mathbb{R}^2 וסגורה מכוונת נגד כיוון השעון העוקפת את הנקודות p_1, \dots, p_n נגדיר

$$F(x) = \sum_{i=1}^n q_i \nabla \log \|x - p_i\|^2$$

כאשר $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}$ הם קבועים. בעזרת משפט גרין ותרגיל הקודם הראו ש

$$\int_C F \cdot N ds = 4\pi (q_1 + \dots + q_n)$$

4. חשבו את האינטגרלים

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy$$

עם Γ נגד כיוון השעון עבור המקרים הבאים:

(א) כאשר $P = x^2(y+1), Q = -xy^2$

$$\Gamma = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$$

(ב) כאשר $P = x^2(y+1), Q = -xy^2$

$$\Gamma = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$$

(ג) כאשר $P = x(x+y)^2 + e^{-x^3}, Q = e^{-(x-y)^3}$

$$\Gamma = \{(x, y) | |x| + |y| = 2\}$$

הדרכה: השתמשו בהחלפת משתנים $u = x + y$ ו $w = (x - y)$

(ד) $P = -y + \cos x$ ו $Q = x$

$$\Gamma = \{(x, y) | x^2 + 3y^2 + 2xy = 1\}$$

5. הוכיחו כי עבור $a > b$ השטח של הציקלואידה

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} \leq (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$$

הוא

$$\frac{3\pi (a^2 - b^2)^2}{8ab}$$

הדרכה: הסבירו קודם מדוע

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t$$

$$y = \frac{a^2 - b^2}{b} \sin^3 t$$

עבור $t \in [0, 2\pi]$ היא פרמטריזציה של הציקלואידה המדוברת.