ע"ע, ו"ע - $Av = \lambda v$

21 באוקטובר 2020

1. ע"ע וו"ע של מטריצת היחידה I - מי הם?
תשובה: לכל וקטור v מתקיים ש $Iv = v = 1 \cdot v$ ולכן 1 הוא ע"ע של I שמתאים לכל וקטור $v \neq 0$.
2. ע"ע וו"ע של מטריצת האפס $0 \in \mathbb{F}^{n\times n}$
תשובה: לכל וקטור v מתקיים ש $0v = 0 = 0 \cdot v$ ולכן 0 הוא ע"ע של 0 שמתאים לכל וקטור $v \neq 0$.
3. איך מוצאים ע"ע ו"ע למטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$?
   (א) $p_A(\lambda) = 0 \iff \lambda$ע"ע (כאשר $p_A(x) = |xI - A|$ הפ"א)
   (ב) $0 \neq v \in V_\lambda = N(A - \lambda I) \iff v$ו"ע (כאשר V_λ מ"ע כל הו"ע של λ + וקטור האפס)
4. פ"א של משולשית = $p_A(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - a_{i,i})$ ולכן הע"ע של מטריצה משולשית הם איברי האלכסון.
5. תרגיל: $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה שכל השורות מסתכמות ל α יש ע"ע α. למשל

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 0 \\ -1 & 7.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

כל שורה ב A מסתכמת ל 6 ולכן התרגיל אומר ש 6 הוא ע"ע של A.

הוכחה: נסתכל על וקטור שכולו אחדות $0 \neq v = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ אז הכפל

$$Av = \sum_{i=1}^{n} C_i(A) = \begin{pmatrix} a_{1,1} + \cdots + a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{n,1} + \cdots + a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

ולכן α ע"ע.
הערה: שימו לב, זה לא אומר ש v הוא הו"ע היחידי של α! מעל הממשיים, זהו בודאות לא הו"ע היחידי. שהרי $5\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ הוא ו"ע (נימוק: V_α הוא ת"מ ולכן מספר כלשהוא של ו"ע של α נמצא שם ולכן גם כל צירוף לינארי שלהם גם ב V_α. אם הצירוף הלינארי שונה מאפס אז הוא גם יהיה ו"ע של α).

6. תרגיל: A,A^t יש אותם ע"ע .
הוכחה:

$$p_A(x)=|xI-A|\overset{(1)}{=}\left|(xI-A)^t\right|\overset{(2)}{=}\left|xI^t-A^t\right|\overset{(3)}{=}\left|xI-A^t\right|=p_{A^t}(x)$$

כאשר (1) מכיון שדטר' של מטריצה = לדטר' של המשוחלפת שלה. (2) כי שיחלוף היא ה"ל $I(3)$ סימטרית.

7. מה הפ"א של $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$
תשובה:

$$p_A(x)=\left|\begin{pmatrix}x&0\\0&x\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}x&-1\\1&x\end{pmatrix}\right|=x^2+1$$

ולכן מה הע"ע? תלוי בשדה. מעל הממשיים - אין ע"ע! מעל המרוכבים יש $\pm i$ (הערה: מעל $\mathbb{Z}_3$ אין ע"ע, מעל $\mathbb{Z}_5$ יש ע"ע למשל $2,3$)

8. תרגיל: A הפיכה אמ"מ אין לה ע"ע =0.
בהרצאה.

9. תהא A מטריצה ריבועית. אם λ ע"ע של A אזי λ^k ע"ע של A^k (לכל k טבעי או אפס). בנוסף, אם A הפיכה אז נכון גם ל k שלילי.
הוכחה: נניח כי λ הוא ע"ע של A ולכן קיים $v\neq 0$ כך ש $Av=\lambda v$. נוכיח באינדוקציה ש λ^k הוא ע"ע של A^k

- בסיס $k=0$: אכן $\lambda^0=1$ הוא ע"ע של $A^0=I$ (גם מיידית עבור $k=1$ כי ההנחה ש λ הוא ע"ע של A)
נעשה עוד אחד (לא חייבים אבל יעזור להבין את ה"צעד") $k=2,3$

$$A^2v=A\left(Av\right)=A\left(\lambda v\right)=\lambda Av=\lambda\lambda v=\lambda^2v$$
$$A^3v=A\left(A^2v\right)=A\left(\lambda^2v\right)=\lambda^2Av=\lambda^2\lambda v=\lambda^3v$$

- צעד: נניח נכונות עבור k כל שהוא ונוכיח עבור $k+1$. אכן

$$A^{k+1}v=A\left(A^kv\right)=A\left(\lambda^kv\right)=\lambda^kAv=\lambda^k\lambda v=\lambda^{k+1}v$$

הערה: שימו לב שזה לא חלק מניסוח התרגיל אבל זה מופיע בהוכחה שאותו וקטור עצמי של λ (עם המטריצה A) הוא גם ו"ע של λ^k (עם המטריצה A^k).
בנוסף, בהנחה ש A הפיכה נוכיח עבור $k=-1$. ניקח את השיוויון $Av=\lambda v$ ונכפול ב A^{-1} משמאל ונקבל $v=\lambda A^{-1}v$ ואז נכפיל ב λ^{-1} (שהרי $\lambda\neq 0$ שהרי A הפיכה) ונקבל ש $A^{-1}v=\lambda^{-1}v$. כעת, לכל k טבעי

$$A^{-k}v=\left(A^{-1}\right)^kv=\lambda^{-k}v$$

כאשר המעבר השני מתבסס על ההוכחה ממקודם (עבור המקרה של A כללית) עם המטריצה $A^{-1}v=\lambda^{-1}v$.

(א) כיוון שני לטענה "תהא A מטריצה ריבועית. לכל λ אם λ^k ע"ע של A^k אזי λ ע"ע של A (לכל k טבעי)".
הפרכה: כלומר השלילה של הטענה נכונה - קיים λ כך ש λ^k ע"ע של A^k אבל λ אינו ע"ע של A
מעל הממשיים - למטריצה $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ אין ע"ע כי $p_A(x)=\left|\begin{pmatrix}x&1\\-1&x\end{pmatrix}\right|=x^2+1$ אבל $A^4=I$ ולה יש ע"ע אחד (וזה מפריך עם $\lambda=1$ ו $k=4$).
הערה: זה גם מראה שהטענה "אם לחזקה של מטריצה יש ע"ע אז גם למטריצה" - אינה נכונה.
מה לגבי המרוכבים? גם לא נכון! למטריצה המרוכבת $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ יש $\pm i$ ע"ע בלבד כי $p_A(x)=\left|\begin{pmatrix}x&1\\-1&x\end{pmatrix}\right|=x^2+1$ אבל $A^4=I$ ולה יש ע"ע אחד (וזה מפריך עם $\lambda=1$ ו $k=4$).
הערה (כבדה, אולי/כנראה בהמשך הקורס): במרוכבים אם λ^k ע"ע של A^k אז יש $\hat{\lambda}$ ע"ע של A כך ש $\hat{\lambda}^k=\lambda^k$.

(ב) תרגיל: תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ נילפוטנטית (כלומר, קיימת חזקה טבעית k כך ש $A^k = 0$) - מה הם הע"ע שלה?
הוכחה:
טענה1: אם λ הוא ע"ע של A אז $\lambda = 0$. הוכחה הטענה1: אם λ ע"ע אז λ^k הוא ע"ע של $A^k = 0$ ולכן $\lambda^k = 0$ ולכן $\lambda = 0$.
טענה2: 0 הוא ע"ע של A. מתקיים

$$p_A(0) = |0I - A| = |-A| = (-1)^n |A| = 0$$

ולכן 0 ע"ע כי הוא שורש של הפ"א (הערה: $|A| = 0$ כי A אינה הפיכה שהרי אחרת קיימת A^{-1} ואז $I = A^{-k}A^k = A^{-k}0 = 0$).
לכן לסיכומו של תרגיל ל A יש ע"ע 0 והוא היחיד.

10. תרגיל: תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ויהא $f(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$ פולינום ב $\mathbb{F}[x]$. אם $Av = \lambda v$ אזי $f(A)v = f(\lambda)v$ (כאשר $f(A) = \sum_{i=0}^{d} a_i A^i$)
הוכחה: בהתבסס על התרגיל הקודם נקבל ש

$$\begin{aligned} f(A)v &= \left(\sum_{i=0}^{d} a_i A^i\right) v \\ &= \sum_{i=0}^{d} a_i \left(A^i v\right) \\ &= \sum_{i=0}^{d} a_i \left(\lambda^i v\right) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{d} a_i \lambda^i\right) v \\ &= f(\lambda)v \end{aligned}$$

למשל אם $Av = \pi v$ ו $p(x) = 2 + 3x^2 - 4x^3$ אז $p(\pi) = 2 + 3\pi^2 - 4\pi^3$ הוא ע"ע של $p(A) = 2I + 3A^2 - 4A^3$ (עם אותו וקטור v)