

אלגברה לינארית תרגול 7

30 בנובמבר 2020

1 אי-תלות ופרישה

תרגילים:

1. נדבר על $V = \mathbb{R}^4$. נניח v, u, w בת"ל. האם $v + u, v + w, u + w$ בת"ל?
פתרון: נניח $\alpha(v + u) + \beta(v + w) + \gamma(u + w) = 0$ צריך לבדוק האם זה גורר ש- $\alpha = \beta = \gamma = 0$? נקבל
 $(\alpha + \beta)v + (\alpha + \gamma)u + (\beta + \gamma)w = 0$, כיון שנתון ש- v, u, w בת"ל נקבל את המערכת:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

עכשיו בעצם השאלה היא: האם יש פתרון לא טריוויאלי למערכת הזו. נבדוק:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1 \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_2 \rightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

כיון שאין משתנה חופשי נקבל שיש רק את הפתרון הטריוויאלי, ולכן הוקטורים בת"ל.

2. יהא V מ"ו, $S_1, S_2 \subseteq V$. הוכיחו: אם $S_1 \subseteq S_2$ אז $\text{span}(S_1) \subseteq \text{span}(S_2)$.
פתרון: יהי $v \in \text{span}(S_1)$ צ"ל: $v \in \text{span}(S_2)$. כיון ש- $v \in \text{span}(S_1)$ זאת אומרת שיש $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ וכן יש $v_1, \dots, v_n \in S_1$ כך ש- $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. מההכלה $S_1 \subseteq S_2$ נקבל $v_1, \dots, v_n \in S_2$, ואז לפי הגדרה $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \in \text{span}(S_2)$.

3. יהא V מ"ו, $v_1, v_2 \in V$. הוכיחו: v_1, v_2 ת"ל אמ"ם (v_1 כפולה של v_2 או v_2 כפולה של v_1).
פתרון: כאן נצטרך להוכיח גרירה דו-כיוונית:
 $\Leftarrow$: נתון v_1, v_2 ת"ל צ"ל שהם כפולה. מהתלות נובע שיש $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ כך ש- $\alpha v_1 + \beta v_2 = 0$. אם $\alpha \neq 0$, אז נקבל שניתן לחלק ב- α ולכן $v_1 = -\frac{\beta}{\alpha} v_2$ (כלומר, v_1 כפולה של v_2). בדומה עבור $\beta \neq 0$.
הערה: וקטור $v \neq 0$ תמיד בת"ל כי אם $\alpha v = 0$ מתחייב $\alpha = 0$. וכמובן וקטור האפס ת"ל בעקבות הצירוף $1 \cdot 0 = 0$.
 $\Rightarrow$: אם $v_1 = \alpha v_2$ אז נקבל $0 = (-\alpha) \cdot v_2 + 1 \cdot v_1 = v_1 - \alpha v_2$ ולכן הם ת"ל. בדומה עבור $v_2 = \alpha v_1$.

4. במרחב $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ נגדיר:

$$S = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(א) מצאו מטריצה $A \notin \text{span}(S)$, אם אפשר.

פתרון: נבדוק מהם הצ"ל האפשריים של S : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3$ נקבל מערכת:

$$\begin{cases} a = \alpha + 2\beta + \gamma \\ b = \alpha - \gamma \\ c = \beta + \gamma \\ d = \alpha + 3\beta \end{cases}$$

נפתור את המערכת:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 1 & 3 & 0 & d \end{array} \right) &\xrightarrow{R_4 - R_1 \rightarrow R_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 1 & -1 & d - a \end{array} \right) &\xrightarrow{R_2 - R_1 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & -2 & -2 & b - a \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 1 & -1 & d - a \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_2 + 2R_3 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & b - a + 2c \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 1 & -1 & d - a \end{array} \right) &\xrightarrow{R_4 - R_3 \rightarrow R_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & b - a + 2c \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & -2 & d - a - c \end{array} \right) \end{aligned}$$

לכן יש פתרון למערכת אם ורק אם אין שורת סתירה, שזה קורה אם ורק אם $b - a + 2c = 0$ (כי קל לראות שלא ניתן להגיע לעוד שורת סתירה - כי הגענו למטריצה משולשית). לכן כדי למצוא מטריצה שלא נפרשת ע"י S נבחר a, b, c, d שלא מקיימים את התנאי. למשל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \notin \text{span}(S)$$

(ב) האם S בת"ל?

פתרון: צריך לבדוק האם מהצירוף $\alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ מתחייב $\alpha = \beta = \gamma = 0$? אנחנו מקבלים את אותה מערכת, פשוט הומוגנית:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \dots \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

כיון שאין משתנה חופשי יש פתרון יחיד למערכת, וכיון שזו מערכת הומוגנית מדובר בפתרון הטריטיואל. ולכן הוקטורים בת"ל.

5. יהא V מ"ו, $A, B \subseteq V$ קב'. הוכיחו או הפריכו:

(א) $\text{span}(A) \Delta \text{span}(B) \subseteq \text{span}(A \Delta B)$

(ב) $\text{span}(A) \Delta \text{span}(B) \supseteq \text{span}(A \Delta B)$

הערה: שימו לב שלכל קבוצה X מתקיים: $\text{span}(X)$ הוא תת-מרחב וקטורי. ראשית לפי הגדרה $\text{span}(\emptyset) = \{0\}$. אם $X \neq \emptyset$ אז יש וקטור $v \in X$ ואז הצ"ל $0 \cdot v = 0_V$ הוא זה שגורר $0 \in \text{span}(X)$. לדוגמא ניקח את

וקטורים מ- X זה פשוט כפולות של X , ולכן נקבל $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ אז $X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ מה זה $\text{span}(X)$ במקרה הזה? כיון שיש כאן וקטור אחד אז צ"ל של

$$\text{span}(X) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix} \right\}$$

שה הישר $y = 2x$.

פתרון: ב. שימו לב ש- $\text{span}(X)$ הוא תמיד תת-מרחב וקטורי, ולכן בפרט $0 \in \text{span}(X)$. לכן נקבל $0 \in \text{span}(A\Delta B)$, $0 \notin \text{span}(A)\Delta \text{span}(B)$ ולכן $\text{span}(A\Delta B) \neq \text{span}(A)\Delta \text{span}(B)$.
 $\text{span}(A)\Delta \text{span}(B) \not\subseteq \text{span}(A\Delta B)$ ולכן $\text{span}(A)\Delta \text{span}(B) \neq \text{span}(A\Delta B)$.

א. יהי $v \in \text{span}(A)\Delta \text{span}(B)$ לכן יש $v_1, \dots, v_n \in A$ כך ש- $v = \sum \alpha_i v_i$ ובנוסף לכל $u_1, \dots, u_m \in B$ ולכל אלפאות $v \neq \sum \alpha_i u_i$ (או להיפך). זה לא אומר ש- $v_1, \dots, v_n \in A\Delta B$ כי אולי חלקם כן נמצאים ב- B . וזה מה שיתן לנו את ההפרכה:

$$V = \mathbb{R}^2 \text{ וניקח } A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ נקבל:}$$

$$A\Delta B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \text{span}(A\Delta B) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{span}(A) = \mathbb{R}^2, \text{span}(B) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{נותר למצוא } \text{span}(B) = \mathbb{R}^2 \setminus \text{span}(B) \text{ כך ש-} v \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \text{ למשל } v = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

2 בסיס ומימד

תרגילים:

$$1. \text{ עבור } W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} : \begin{matrix} a - 3b - 5c = d \\ 4b + 8c - 2d = 2a \end{matrix} \right\}, W_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ בסיס ל- } W_1, W_2, W_1 \cap W_2.$$

$$\text{פתרון: כדי למצוא בסיס צריך קבוצה בת"ל שפורשת את המרחב. עבור } W_2 \text{ נסמן } S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

נתון $\text{span}(S) = W_2$ ולכן S פורשת את W_2 . לכן, אם נוכיח ש- S בת"ל נקבל ש- S בסיס של W_2 . קל לראות שאם

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \text{ אז } \alpha = 0 \text{ בגלל הרכיב הראשון, } \beta = 0 \text{ בגלל הרכיב הרביעי. ולכן הוקטורים בתל. אגב,}$$

קיבלנו שהמימד של W_2 הוא 2.

לגבי W_1 : בתרגול הבא...