תרגיל 11

1. אילו מהפונקציות הבאות היא ממכפלה פנימית על $\mathbb{R}^2$:

(א) $\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2x_1y_1 + 7x_2y_2$

(ב) $\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2x_1x_2 + 7y_1y_2$

(ג) $\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2$

2. יהא V ממ"פ.

(א) הוכח כמעט לינארית ברכיב שני. כלמר הוכח כי $\langle v, \alpha u + w\rangle = \bar{\alpha}\langle v, u\rangle + \langle v, w\rangle$ (לכל $v, u, w \in V$ ולכל α סקלאר)

(ב) יהא $B = \{v_1, \dots v_n\}$ בסיס. יהיו $v, u \in V$ כך שלכל i מתקיים $< v_i, v >=< v_i, u >$. הוכח כי $v = u$

3. יהא V ממ"פ. תהא $T : V \to V$ ה"ל. הוכח או הפרך:

(א) אם לכל $v \in V$ מתקיים כי $\langle Tv, v\rangle = 0$ אזי $T = 0$

(ב) תהא S קבוצה פורשת של V. אם לכל $u, v \in S$ מתקיים כי $< Tv, u >= 0$ אז $T = 0$

4. יהא V ממ"פ מעל השדה $\mathbb{R}$ עם נורמה מושרית $||\cdot||$הוכח את הבאים לכל $u, v \in V$:

(א) $< u, v >= \frac{1}{4}\left(||u + v||^2 - ||u - v||^2\right)$

(ב) כלל המקבילית $||v + u||^2 + ||v - u||^2 = 2\left(||v||^2 + ||u||^2\right)$

בהצלחה!