# מבוא לטופולוגיה - תרגיל בית 5

1. תהא $X$ קבוצה כלשהי. תהא $\tau$ קבוצת תת-קבוצות
כך ש- $\tau = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq X \mid |U^c| \leq \aleph_0\}$.
הוכיחו ש- $\tau$ טופולוגיה.
(<u>הערה</u>. המשמעות של אי שוויון $|A| \leq \aleph_0$: $A$ היא קבוצה בת מניה או סופית).

2. יהי $X$ מרחב מטרי ו- $Y = \{x \in X \mid d(a_1, x\} = d(a_2, x)\}$.
הוכיחו ש-$Y$ קבוצה סגורה .

<u>תזכורת.</u>

<u>הגדרה</u>. תהא $A$ תת-קבוצה במרחב טופולוגי $X$. תת-קבוצה

$$Cl(A) = \bigcap_{\substack{A \subseteq F \subseteq X \\ F \text{ סגורה}}} F$$

נקראת *<u>סגור של $A$</u>*.

<u>הגדרה</u>. תהא $A$ תת-קבוצה במרחב טופולוגי $X$. תת-קבוצה

$$Int(A) = \bigcup_{\substack{U \subseteq A \subseteq X \\ U \text{ פתוחה}}} U$$

נקראת *<u>פנים של $A$</u>*.

<u>כמה תכונות בסיסיות של סגור ופנים:</u>

(a) $A \subseteq Cl(A)$

(b) $A \subseteq B \Rightarrow Cl(A) \subseteq Cl(B)$

(c) $Cl(A)$ קבוצה סגורה

(d) $Cl(Cl(A)) = Cl(A)$

(e) $A$ סגורה $\Leftrightarrow Cl(A) = A$ -

(f) נקודה $p$ שייכת ל- $Cl(A)$ א"א כל סביבה של $p$ נחתכת עם $A$.

(g) $Int(A)$ קבוצה פתוחה.

(h) $Int(A)$ היא קבוצה של כל הנקודות הפנימחות ב-$A$ .

3. א' הוכיחו אותן התכונות מ- (a)-(h), שלא הוכחו בארצאה.
ב' תהא $A$ תת-קבוצה במרחב טופולוגי .הוכיחו: $Int(A) = \left(Cl(A^c)\right)^c$.
ג' תהא $A$ תת-קבוצה במרחב טופולוגי .הוכיחו ש- $Cl(A) - Int(A)$ קבוצה סגורה.

4. תהא $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה בת מניה. קבעו מה היא הקבוצה $Int\ (A)$ ?
(טופולוגיה ב-$\mathbb{R}$ רגילה)

5. הוכיחו ש- $\mathbb{Q}$ ו- $\mathbb{Q}^c$ צפופות ב-$\mathbb{R}$ .
(טופולוגיה ב-$\mathbb{R}$ רגילה, $\mathbb{Q}$ - קבוצת מספרים רציונליים).

6. יהיו $X$ מרחב טופולוגי ו-$M$ מרחב מטרי.
תהא תת-קבוצה $A \subseteq X$ צפופה ב-$X$ ויהיו $f, g: X \to M$ שתי פונקציות רציפות כך ש- $f|_A = g|_A$.
הוכיחו ש- $f = g$.