תרגיל 6

1. תהא $A \subsetneq \mathbb{R}$ קבוצה צפופה ב $\mathbb{R}$. הוכיחו כי A לא קשירה.

פתרון:

כיוון ש $A \neq \mathbb{R}$ אזי קיים $x \in \mathbb{R} \backslash A$. כעת נגדיר $V_1 = (x, \infty), V_2 = (-\infty, x)$ פתוחות ב $\mathbb{R}$ ולכן $A \cap V_i \neq \emptyset$ (לכל i) כי A צפופה. נקבל מכאן כי

$$A = [A \cap V_1] \uplus [A \cap V_2]$$

פירוק של A לאיחוד זר של קבוצות פתוחות (ב A) זרות לא ריקות. לכן A אינה קשירה.

2. יהי (X, τ) מ״ט. הוכיחו ש (X, τ) טריויאלי אמ״ם לכל $\emptyset \neq A \subseteq X$, A צפופה ב X.

פתרון:

$(\Rightarrow)$ צ״ל $\tau = \{\emptyset, X\}$. נניח בשלילה כי $\emptyset, X \neq O \in \tau$ אזי $O^c \neq \emptyset, X$ סגורה ולכן $cl(O^c) = O^c \neq X$ בסתירה לנתון.

$(\Leftarrow)$ צ״ל לכל $\emptyset \neq A \subseteq X$, A צפופה ב X. תהא $\emptyset \neq A \subseteq X$ כיוון שהנתון הוא ש $\tau = \{\emptyset, X\}$ הקבוצות הסגורות היחידות הן $\{\emptyset, X\}$ ולכן $cl(A) = X$. כלומר A צפופה.

3. יהי X מרחב טופולוגי. תהיינה $U \subseteq X$ קבוצה פתוחה ו$-$ $A \subseteq X$ קבוצה **צפופה**, כלומר $cl(A) = X$.

(א) הוכיחו: $U \subseteq cl(A \cap U)$.

פתרון:

יהא $x \in U$ צ״ל $x \in cl(A \cap U)$. ש״ל לכל סביבה פתוחה V של $x \in V$ מתקיים כי $A \cap U \cap V \neq \emptyset$. אכן, לכל V כזאת, כיוון ש $U \cap V$ פתוחה לא ריקה (כי $x \in U \cap V$) ו A צפופה מתקיים כי $A \cap U \cap V \neq \emptyset$.

(ב) הוכיחו: $cl(U) = cl(A \cap U)$.

פתרון:

$(\subseteq)$ מסעיף קודם $U \subseteq cl(A \cap U)$ ולכן $cl(U) \subseteq cl(A \cap U)$.

$(\supseteq)$ $A \cap U \subseteq U$ ולכן $cl(A \cap U) \subseteq cl(U)$

4. יהי (X, τ) מרחב טופולוגי. עבור קבוצה $A \subseteq X$ נגדיר את הפונקציה $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ שנקראת הפונקציה האופיינית של A לפי

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

הוכיחו כי X קשירה אם ורק אם לכל $A \subseteq X$ (למעט $\emptyset, X$) הפונקציה χ_A אינה רציפה.

פתרון. X קשירה אם ורק אם אין $A \subseteq X$ (למעט $\emptyset, X$) שהיא סגוחה. לכן מספיק להראות ש χ_A רציפה אם ורק אם A סגוחה. אבל באמת, נניח ש A סגוחה ותהי $U \subseteq \mathbb{R}$ פתוחה אז

$$\chi_A^{-1}(U) \in \{\emptyset, A, A^c, X\}$$

ולכן χ_Aרציפה. מצד שני, אם χ_A רציפה אז

$$A = \chi_A^{-1}(\{1\})$$

$$A = \chi_A^{-1}((0.5, 1.5))$$

ולכן A גם פתוחה וגם סגורה.

5. האם המרחבים הבאים קשירים?

(א) $(\mathbb{R} \cup \{p\}, \tau)$ כאשר $\tau = P(\mathbb{R}) \cup \{O \subseteq \mathbb{R} \cup \{p\} : |O^c| < \aleph_0\}$.
פתרון:

לא קשיר. הקבוצה $\{1\}$ סגוחה, כי ניתן לראות שגם היא וגם המשלים פתוחות, לפי הגדרת הטופולוגיה.

(ב) $(\mathbb{N}, \tau)$ כאשר $\tau = \{\emptyset, \mathbb{N}, O_n\} \forall n$, $O_n = \{0, ..., n\}$.
פתרון:

המרחב קשיר. אין קבוצה סגוחה לא טריוויאלית, כי כל קבוצה פתוחה שאינה ריקה חייבת להכיל את 0, ולכן לא תיתכן קבוצה פתוחה שאינה ריקה, שגם המשלימה שלה פתוחה.

(ג) $\mathbb{Z}$ עם הטופולוגיה המושרית מהמטריקה הp- אדית.
פתרון:

המרחב אינו קשיר. הוכחנו בעבר שכל קבוצה מהצורה $p\mathbb{Z}$ היא סגוחה.

6. יהו $A, B \subseteq X$ קבוצות כך ש $A \cap B$ ו $A \cup B$ קשירים. הוכיחו שA, B קשירות.
פתרון:

לשם הפשטות נניח ש$A \cup B$ הוא כל המרחב שלנו. כלומר, $X = A \cup B$.

נניח בשלילה שA לא קשיר. אז יש פירוק לא טריוויאלי $A = O_1 \cup O_2$ קבוצות פתוחות בA וזרות. מכיוון שA פתוחת הן פתוחות גם בX. נשים לב שמכיוון ש$A \cap B$ קשירה, אז היא בהכרח מוכלת באחת מהקבוצות. בה"כ, $A \cap B \subseteq O_1$. לכן B וO_2 הן קבוצות פתוחות לא ריקות וזרות שמכסות את X. בסתירה לכך שX קשיר. לכן Aקשיר. באופן זהה ניתן להוכיח שB קשיר.