

אנליזה 1 למורים - פתרון תרגיל 2

שאלה 1

פתרו את האי שוויונות הבאות:

$$1. \log_{x+1}(x^2 - 1) < \log_{x+1}(2x + 2)$$

נחלק למקרים:

א. $0 < x+1 < 1$

$-1 < x < 0$

במקרה זה, זה שקול לפתירת האי שוויון הבא:

$$x^2 - 1 > 2x + 2$$

$$x^2 - 2x - 3 > 0$$

$$(x+1)(x-3) > 0$$

ולכן: $x < -1$ או $x > 3$

סך הכל קיבלנו: $-1 < x < 0$ וגם $x < -1$ או $x > 3$

ולכן הפתרון במקרה זה: $-1 < x < 0$

ב. $x+1 > 1$

$x > 0$

במקרה זה, זה שקול לפתירת האי שוויון הבא:

$$x^2 - 1 < 2x + 2$$

$$x^2 - 2x - 3 < 0$$

$$(x+1)(x-3) < 0$$

ולכן: $1 < x < 3$

סך הכל קיבלנו: $x > 0$ וגם $1 < x < 3$

ולכן הפתרון במקרה זה: $1 < x < 3$

$$2. (x+1)^{x^2} < (x+1)^{2x}$$

נחלק למקרים:

א. $-x+2 > 1$

$x < 1$

במקרה זה, זה שקול לפתירת האי שוויון הבא:

$$x^2 < 2x$$

$$x^2 - 2x < 0$$

$$x(x-2) < 0$$

ולכן $0 < x < 2$

סך הכל קיבלנו: $x < 1$ וגם $0 < x < 2$

ולכן הפתרון במקרה זה: $0 < x < 1$

$$0 < -x + 2 < 1$$

$$-2 < -x < -1 \quad \text{ב.}$$

$$1 < x < 2$$

במקרה זה, זה שקול לפתירת האי שוויון הבא:

$$x^2 > 2x$$

$$x^2 - 2x > 0$$

$$x(x-2) > 0$$

$$0 < x < 2 \quad \text{ולכן}$$

סך הכל קיבלנו: $1 < x < 2$ וגם $x < 0$ או $x > 2$ ולכן במקרה זה אין פתרון

פתרון שאלה 2

הוכיחו שהגבול של הסדרה $a_n = \frac{2n-1}{3n}$ הוא: $\frac{2}{3}$

הוכחה:

יהי $\varepsilon > 0$ ונרצה להראות שקיים n_0 כל שלכל $n \geq n_0$ מתקיים: $\left| \frac{2n-1}{3n} - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon$

$$\left| \frac{2n-1}{3n} - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{2}{3} - \frac{1}{n} - \frac{2}{3} \right| = \frac{1}{n}$$

$$\left| \frac{2n-1}{3n} - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$$

נבחר $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ ואכן יתקיים כי לכל $n \geq n_0$ מתקיים:

$$\left| \frac{2n-1}{3n} - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{2}{3} - \frac{1}{n} - \frac{2}{3} \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$