

חשבון אינפיניטסימלי 4 (88-236-01/05)
מועד א', תשע"ח

מרצה: פרופ' אנדריי לרנר.

משך הבחינה: 3 שעות.

חומר עזר: אין להשתמש בכל חומר עזר. אין להשתמש במחשבון כיס.

ענו על 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.

1. הוכח את משפט הדיברגנץ

$$\int_{\partial G} F \cdot N \, ds = \int_G (\operatorname{div} F) \, dx$$

(כאשר N הוא נורמל חיצוני ל- ∂G) במקרה כאשר G היא ריבוע $[0, 1] \times [0, 1]$ ב- $\mathbb{R}^2$.

2. בעזרת משפט גרין חשב

$$\int_{\Gamma} xy^2 dx + xy dy$$

כאשר $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2, x \in [-1, 1]\}$ עם אוריינטציה נגד כיוון השעון.

3. חשב את שטח הפנים של חיתוך המישור $z = x + 3$ עם הגליל $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

4. בעזרת משפט סטוקס חשב את האינטגרל

$$\int_{\Gamma} (z - y) dx - (x + z) dy - (x + y) dz$$

כאשר Γ היא החיתוך של הספירה $\{x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$ עם המישור $z = y$ ואוריינטציה על Γ נגד כיוון השעון אם מסתכלים מכיוון חיובי של ציר Oz .

5. עבור $n \geq 3, x_0 \in \mathbb{R}^n$, נסמן $\Phi(x) = \frac{1}{(n-2)\omega_n} \cdot \frac{1}{\|x-x_0\|^{n-2}}$ כאשר ω_n שטח הפנים של הספירה $S_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$. הוכח שאם $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ אזי

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S(x_0, \varepsilon)} u(x) (\operatorname{grad} \Phi(x)) \cdot N \, dS = u(x_0)$$

כאשר $S(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| = \varepsilon\}$ ו- N נורמל פנימי.

בהצלחה!