

פתרון חצי אפוי לבוחן קיץ

תיכונים 2025 – עדי מכנס

א.1.

$$A_1 = \{1\}$$

$$B_1 = \{2\}$$

$$A_2 = B_1 \cup \{x + 2^1 \mid x \in A_1\} = \{2\} \cup \{1 + 2\} = \{2, 3\}$$

$$B_2 = A_1 \cup \{x + 2^1 \mid x \in B_1\} = \{1\} \cup \{2 + 2\} = \{1, 4\}$$

1.1. באינדוקציה.

בסיס : אכן, עבור $n = 1$:

$$A_1 \cup B_1 = \{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\}$$

ואכן אלו כל האיברים בקבוצה המבוקשת.

צעד : יהי n עבורו הטענה מתקיימת. נוכיח עבור $n + 1$.

$$A_{n+1} \cup B_{n+1} = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 2^{n+1}\}$$

אבל הרי :

$$A_{n+1} = B_n \cup \{x + 2^n \mid x \in A_n\}$$

$$B_{n+1} = A_n \cup \{x + 2^n \mid x \in B_n\}$$

ולכן :

$$A_{n+1} \cup B_{n+1} = B_n \cup \{x + 2^n \mid x \in A_n\} \cup A_n \cup \{x + 2^n \mid x \in B_n\}$$

אבל מהנחת האינדוקציה :

$$= \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 2^n\} \cup \left\{ x + 2^n \mid \begin{array}{c} x \in A_n \\ \text{or} \\ x \in B_n \end{array} \right\}$$

$$= \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 2^n\} \cup \{x + 2^n \mid 1 \leq x \leq 2^n\}$$

וצ"ל שלכל $2^n + 1 \leq m \leq 2^{n+1}$ קיימת הצגה מהצורה $x + 2^n$ (עבור $1 \leq x \leq 2^n$). אבל הנל מתקיים אמ"מ:

$$2^n + 1 \leq x + 2^n \leq 2 \cdot 2^n$$

$$1 \leq x \leq 2^n$$

וכמובן שהנ"ל נכון. משל

1.g. הכלה דו כיוונית.

$\subseteq$ ברור.

$\supseteq$ יהי מספר טבעי x , נוכיח כי קיים n עבורו $x \in A_n$.

נסמן ב M את הטבעי שעבורו מתקיים כי $x \leq 2^M$. מ.ב. מתקיים כי:

$$A_M \cup B_M = \{y \in \mathbb{N} \mid 1 \leq y \leq 2^M\}$$

נחלק למקרים. אם $x \in A_M$ סיימנו. אחרת, $x \in B_M$ ולכן הוא יהיה ב A_{M+1} . משל.

עוד פתרון יפה של אייל בראונשטיין המלךדדדדד המגניב והחתיך, סיגמא [אלגברה] על ברמות מטורפות:

ברור כי $A_M \cup A_{M+1} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. אבל לפי הגדרה $\{y \in \mathbb{N} \mid 1 \leq y \leq 2^M\} = A_M \cup B_M \subseteq A_M \cup A_{M+1}$. אבל x שייך לשם ולכן גם לאיחוד הכללי.

2.א. רפלקסיביות :

תהי $A \subseteq S \times S$ צ"ל ARA . כלומר להראות :

$$\forall (x, y) \in A \exists s \in S: (x, s) \in A$$

אבל זה ברור עבור $s = x$.

(התנאי השני די זהה)

סימטריות :

תהיינה $A, B \subseteq S \times S$ כך ש ARB וצ"ל BRA . נוכיח תנאי אחד, השני די דומה.

יהי $(x, y) \in B$. צריך למצוא $s \in S$ עבורו $(x, s) \in A$. אבל מכיוון ש ARB , קיים אחד שכזה (זה פשוט להפוך את סדר הוגמים בתנאי)

טרנזיטיביות : תהיינה $A, B, C \subseteq S \times S$ כך ש $ARB \wedge BRC$. צ"ל ARC .

נוכיח צד אחד של התנאי, השני די דומה.

יהי $(x, y) \in A$. צריך למצוא $s \in S$ כך ש $(x, s) \in C$. כיוון ש ARB , קיים $s' \in S$ כך ש $(x, s') \in B$. אבל מכיוון ש BRC קיים $s \in S$ כך ש $(x, s) \in C$ ולכן סיימנו. משל.

2.ב. יהיו T_1, T_2 שני יחסי סדר חלקיים. נוכיח ש $T_1 \in [T_2]_R$ ובכך נוכיח את המבוקש. לכן יש להוכיח כי $T_1 RT_2$. כידוע, נוכיח צד אחד והשני יהיה די דומה.

יהי $(x, y) \in T_1$. צריך למצוא $s \in S$ כך ש $(x, s) \in T_2$. כיוון ש T_2 יסי"ח הוא רלפקסיבי ולכן עבור $s = x$ נקבל כי $(x, x) \in T_2$ וסיימנו. משל.

2.ג. במילים, מה משמעות היחס? הוא אומר שלכל הצגה של $(a, *)$ בתת קבוצה של $S \times S$ יש הצגה מהצורה $(a, \#)$ (וכן להפך). האם יש לנו הגבלה על הקבוצות מהן נוצרות הזוגות הסדורים?

הקבוצה הימנית לא ממש מעניינית אותנו, שכן אנחנו מתמקדים באיבר השמאלי בלבד. למעט העובדה כי נדרוש שלא תהיה הקבוצה הריקה, שאחרת זה מוביל לדברים לא נעימים.

מה לגבי השמאלית? רוצים שתהיה הצגה בשני הכיוונים, ז"א כל האיברים של הקבוצה השמאלית מצד ימין נמצאים בקבוצה השמאלית מצד שמאל – וכן להיפך. כלומר שזו תהא בדיוק אותה קבוצה (כי הכלה זו כיוונית).

בטקסט זה, קל לראות כי לכל $\emptyset \neq A, X \subseteq S$, מתקיים כי:

$$[A \times X]_R = \{A \times Y \mid \emptyset \neq Y \subseteq S\}$$

כעת, מה קורה אם $A = \emptyset$? קל לוודא שבמקרה הזה היחידה שתוכל להתייחס אליו היא הקבוצה הריקה (שכן התנאי דו כיווני וצריך לדרוש כי איברים נמצאים בשתי הקבוצות). בכך מיצינו את כל האפשרויות הקיימות.

כעת, כמה קומבינציות כאלה יש?

הבחירה כאן תלויה ב A בלבד! שכן X, Y לא מעניינים אותנו. פרמטרים.

כמה אפשרויות לבחירת A יש? $A \subseteq S$ ולכן $A \in \mathcal{P}(S)$, ומכאן שיש $2^{|S|} = 2^{100}$ אפשרויות כאלה.