אלגברה מופשטת 1
מתרגלים: לואי פולב ומני שלוסברג
מרצה: פרופסור עוזי וישנה

אלגברה מופשטת – פתרון 2

<u>שאלה 1</u>

א. מצאו את המחלק המשותף המקסימלי: $(5614,1260)$.
ב. מצאו $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ כך ש- $1525\alpha+927\beta=1$.

<u>פתרון</u>

שני התרגילים נפתרים עם אוקלידס. ניתן רק את התשובות הסופיות:

א. 14
ב. $\alpha=448,\ \ \beta=-737$

<u>שאלה 2</u>

א) תהי G חבורה סופית, $a,b\in G$. הוכיחו: $ord(ab)=ord(ba)$

(רמז: אם $ord(ab)=n, ord(ba)=m$, הסתכלו על $(ba)^{n+1}$ ועל $(ab)^{m+1}$).

ב) תהי G חבורה, $g\in G$, $ord(g)=n$. הוכיחו ש- $g^a=g^b$ אמ"מ $a\equiv b\pmod n$.

<u>פתרון</u>

א) נסתכל על $(ba)^{n+1}$:

$(ba)^{n+1}=ba\cdot\ldots\cdot ba=b(ab)^n a=ba\to(ba)^n=1\to m|n$.

ואם נסתכל על $(ab)^{m+1}$ נקבל ש- $n|m$ ולכן $m=n$.

ב) יישום ישיר של המשפט הבא: אם $g^m=1$ אזי $o(g)$ מחלק את m.

<u>שאלה 3</u>

א. נגדיר $G=\left\{\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}\middle|a,b,c\in\mathbb{Z}_3\right\}$. הוכיחו כי G חבורה ביחס לפעולת כפל מטריצות, מצאו את הסדר של G ואת הסדר של כל איבר ב G.
ב. תהי G חבורה. אם לכל $a,b\in G$ מתקיים $(ab)^3=a^3b^3$ האם G אבלית?

<u>פתרון</u>

א) G מוכלת ב $GL_3(\mathbb{Z}_3)$ (חבורת המטריצות ההפיכות מסדר 3*3 מעל $\mathbb{Z}_3$). ברור שזוהי קבוצה לא ריקה, לכן נותר לבדוק סגירות לכפל ולהופכי – בדקו זאת ישירות. הסדר של G הוא 3*3*3 = 27 (כי יש שלוש אפשרויות לבחור את a, שלוש אפשרויות לבחור את b ושלוש – את c). בודקים ישירות כי כל איבר ב G פרט לאיבר היחידה הוא מסדר 3 (ז"א – עבור כל **מטריצה** – כשמכפילים אותה בעצמה 3 פעמים – נקבל את איבר היחידה – מטריצת הזהות. אין הכוונה לבדוק את הסדר של האיברים ב- $\mathbb{Z}_3$).

ב) לא. החבורה מסעיף א) מהווה דוגמא נגדית, שכן כל איבר (פרט ליחידה) הוא מסדר 3, אך החבורה אינה אבלית.

שאלה 4

אילו מן החבורות הבאות הן ציקליות? עבור החבורות הציקליות מצאו יוצר, אחרת הסבירו מדוע החבורה אינה ציקלית.

א. $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{15}$
ב. $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2$
ג. U_{20}

פתרון

א. החבורה אינה ציקלית כי אין איבר מסדר 150. אכן, מתקיים לכל $(a,b) \in \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{15}$: $30(a,b) = (0,0)$.
ב. החבורה ציקלית ונוצרת על ידי $(1,1)$.
ג. החבורה אינה ציקלית. בדקו שאכן אין בה איבר מסדר 8.

שאלה 5

אילו מתת-החבורות הציקליות הבאות הן סופיות (במקרה זה מצאו את מספר האיברים) ואילו מהן אינסופיות:

א. $\langle a = 1+i \rangle$ ב- $(\mathbb{C}^*, \cdot)$

ב. $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ ב- $(GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$

פתרון:

א) אם נרשום את a כ- a = r*cisα אז נראה ש- r ≠1 ולכן לא קיים n כך ש- $a^n=1$. ז"א שתת חבורה זו היא אינסופית.

ב) $a=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow a^2=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow .....$

ולכן לעולם לא נגיע ל-I_2, ולכן החבורה ציקלית אינסופית.

שאלה 6

תנו דוגמא למונואיד ציקלי סופי (כלומר, קיים $a\in M$ כך ש- $M=\{1,a,a^2,...\}$) שאינו חבורה.

פתרון

$M=\{1,a\}$ כאשר 1 מתנהג כמו איבר יחידה ו- $a^2=a$.

שאלה 7

א. מצאו תת חבורה ציקלית מסדר 8 ותת חבורה לא ציקלית מסדר 8 של U_{32}.
ב. מצאו בתוך $(\mathbb{Q},+)$ שרשרת אינסופית (עולה) של תת חבורות ציקליות.
<u>רמז</u>: הראשונה נוצרת על ידי 1.

פתרון

א. החבורה הציקלית (יש יותר מאחת) היא $\langle 3\rangle=\{3,9,27,17,19,25,11,1\}$. תת חבורה לא ציקלית (לדוגמא) $\langle 9,15\rangle=\{1,7,9,15,17,23,25,31\}$.
ב. הנה שרשרת כזאת לדוגמא: $\mathbb{Z}\le\frac{1}{2}\mathbb{Z}\le\frac{1}{4}\mathbb{Z}\le...\le\frac{1}{2^n}\mathbb{Z}\le\frac{1}{2^{n+1}}\mathbb{Z}\le...$