

6 תרגיל בית - פתרון

1. תהי X קבוצה מדידה עם מידה סופית ותהי $f \in L^1(X, \mu)$ (אינטגרבילית ביחס ל μ) אי שלילית. הראו ש

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \int_X f^\alpha d\mu = \int_X f d\mu$$

. האם התוצאה נכונה גם עבור $\alpha \rightarrow 1^+$?

2. תהי $\phi(x)$ פונקציה המקיימת $\phi(x) = \phi(x+1)$ לכל $x \in \mathbb{R}$ ובנוסף $\int_{[0,1]} \phi(x) dx < \infty$. נגדיר

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(nx)}{n^2}$$

הראו ש f סופית כמעט בכל מקום.

3. יהיו $f, f_n : X \rightarrow [0, \infty]$ פונקציות מדידות כך ש $f_n \rightarrow f$ כב"מ ו $f \geq f_n$ לכל n . הוכיחו כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int f$$

4. יהי $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ מרחב מידה. נניח כי $X \subset \Omega$ כך ש $\mu(X) = 1$ וכך ש $A, B, C \subseteq X$ כך ש

$$\mu(A) + \mu(B) + \mu(C) \geq 2.5$$

. האם ייתכן כי $A \cap B \cap C = \emptyset$?