תרגיל 1 אינפי 2

.1

a. יהי פולינום p מדרגה n, כלומר $p(x)=a_nx^n+...+a_0$ כך ש $a_n\neq 0$. הוכח שקיימים לכל היותר n שורשים שונים ל p.

פתרון: נוכיח באינדוקציה על הדרגה של הפולינום. ידוע שהנגזרת של פולינום מדרגה n הינה פולינום מדרגה n-1. אם לפולינום p מדרגה n יש מספר שורשים שגדול ממש מn אזי לפי משפט רול בין כל שני שורשים כאלה יש שורש לנגזרת 'p, כלומר לנגזרת יש מספר שורשים גדול ממש מn-1 אבל הנגזרת מדרגה n-1 סתירה.

לבסיס האינדוקציה מספיק לראות שלפונקציה הקבועה (דרגה 0) אין שורשים כלל.

b. הוכח שלמשוואה $2x=\cos x$ יש פתרון יחיד.

פתרון: נגדיר את הפונקציה $h(x)=2x-\cos x$. פתרון למשוואה הנ"ל הוא כמובן שורש של h.
כעת, $h(0)=-1<0$ וגם $h(1)=2-\cos(1)>0$ ולכן לפי משפט ערך הביניים (אינפי 1) חייבת להיות נקודה $c\in(0,1)$ כך ש $h(c)=0$, כלומר קיים פתרון למשוואה.

נניח בשלילה שיש יותר מפתרון אחד, כלומר קיימים c_1,c_2 כך ש $h(c_1)=h(c_2)=0$. לפי משפט רול קיימת נקודה c_3 כך ש $h'(c_3)=0$ אבל $h'(x)=2+\sin x>0$ בסתירה.

c. תהי f גזירה המקיימת $f(1)=0$ ו $f(x)\neq 0$ לכל $x\in(0,1)$. הוכח שקיימת נקודה $c\in(0,1)$ המקיימת $c=-\frac{f(c)}{f'(c)}$ (רמז: הסתכל על הפונקציה $g(x)=xf(x)$)

פתרון: נשים לב ש $g(0)=g(1)=0$ ולכן לפי משפט רול קיימת נקודה $c\in(0,1)$ כך ש $g'(c)=0$ כלומר $cf'(c)+f(c)=0$ נעביר אגב ונחלק לקבל $c=-\frac{f(c)}{f'(c)}$. (אם $f'(c)=0$ אזי $f(c)=0$ בסתירה לנתון)

.2

a. הוכח כי $tg(x)>x$ בקטע $(0,\frac{\pi}{2})$

פתרון: צ"ל ש $\frac{tg(x)}{x}>1$ בקטע. לפי משפט לגרנז', לכל $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ קיימת נקודה $c\in(0,x)$ כך ש $\frac{tg(x)}{x}=\frac{tg(x)-tg(0)}{x-0}=tg'(c)$ אבל $tg'(c)=\frac{1}{\cos^2(c)}>1$ כי עבור $c\in(0,\frac{\pi}{2})$ מתקיים $|\cos c|<1$, ולכן $\frac{tg(x)}{x}>1$.

b. נניח f גזירה ב(a,b) כך ש $f'(x)=0$ לכל $x\in(a,b)$. הוכח כי f קבועה בקטע.

פתרון: נניח בשלילה שהיא לא קבועה. לכן קיימת לה 2 נקודות עליהן היא שונה כלומר $c_1, c_2 \in (a,b)$ כך ש $f(c_1) \neq f(c_2)$. אבל לפי משפט לגרנז' קיימת נקודה $c_3 \in (c_1, c_2) \subseteq (a,b)$ כך ש $f'(c_3) = \frac{f(c_1) - f(c_2)}{c_1 - c_2} \neq 0$ בסתירה.

3. חשב את הגבולות

a. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^k}{e^x}, k \in \mathbb{N}$

פתרון:

נוכיח באינדוקציה שהגבול הנ"ל הינו אפס. טריוויאלי עבור $k=0$. נניח נכון עבור $k-1$ ונוכיח עבור k :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(x^k\right)'}{\left(e^x\right)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{kx^{k-1}}{e^x} = k\lim_{x\to\infty} \frac{x^{k-1}}{e^x} = 0$$

b. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(e^{3x} - 5x\right)^{\frac{1}{x}}$

פתרון:

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(e^{3x} - 5x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\ln\left(\left(e^{3x}-5x\right)^{\frac{1}{x}}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(\left(e^{3x}-5x\right)^{\frac{1}{x}}\right)}$. כעת $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(\left(e^{3x}-5x\right)^{\frac{1}{x}}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\ln\left(e^{3x}-5x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln\left(e^{3x}-5x\right)}{x} =$. כעת המונה והמכנה שואפים לאינסוף ולכן ניתן ולהפעיל לופיטל, וזה שווה:

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(e^{3x}-5x\right)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3e^{3x}-5}{e^{3x}-5x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{9e^{3x}}{3e^{3x}-5} = 3$$

ולכן הגבול כולו שווה ל e^3

c. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos\left(x^2\right)}{x^2\sin\left(x^2\right)}$

פתרון:

המכנה והמונה שואפים לאפס, לכן נפעיל לופיטל

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\left(x^2\right)}{x^2\sin\left(x^2\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\sin(x^2)}{2x\sin(x^2) + x^2 2x\cos(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{\sin(x^2) + x^2\cos(x^2)} =$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos(x^2)}{2x\cos(x^2)+2x\cos(x^2)-x^2\,2x\sin(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x^2)}{\cos(x^2)+\cos(x^2)-x^2\sin(x^2)}=\frac{1}{2}$$

d. $\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}$

פתרון:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}=\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}}=e^{0}=1$$

e. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$

פתרון:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\cos x}\,(\sin x)}{\sqrt{1-\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\cos x}\,(\sin x)}{\sqrt{\sin^2 x}}=\lim_{x\to 0}\sqrt{1+\cos x}\,\frac{\sin x}{|\sin x|}$$

ולכן אין גבול באפס, אך הגבולות החד צדדיים באפס הינם $\pm\sqrt{2}$