תזכורת:

תהי $\langle A, < \rangle$ קס"ח. נגיד שA סדורה היטב (היחס סדר נקרא "סדר טוב") אם לכל תת קבוצה $A \supseteq B \neq \emptyset$ קיים איבר ראשון.

תרגיל:

תהי $\langle A, < \rangle$ קבוצה סדורה היטב $f : A \to A$ כאשר f פונקציה שומרת סדר. הוכיחו שלכל $a \in A$ מתקיים: $a \leq f(a)$. $(f(a) = a \vee a < f(a))$

(תזכורת: קבוצה סדורה היטב היא בפרט סדורה קווית ולכן אפשר להשוות בין a ל$f(a)$).

הערה: אם A לא סדורה היטב הטענה אינה נכונה. למשל אם ניקח את $\mathbb{R}$ עם היחס סדר הרגיל, אז הפונקציה $f(x) = x - 1$ שומרת (אפילו- איזו' סדר).

פתרון: נניח בשלילה שהטענה לא נכונה. כלומר, קיים $a \in A$ כך ש$a < f(a)$.

$$\emptyset \neq B = \{a \in A : f(a) < a\} \subseteq A$$

לכן קיים לה איבר ראשון, נקרא לו d. אז $f(d) < d$.

$f : A \to A$ לכן $f(d) \in A$ אז אפשר להפעיל עליו את f.

f שומרת סדר ולכן

$$f(d) < d \Longrightarrow f(f(d)) < f(d)$$

נסמן $f(d) = c$. קיבלנו ש

$$f(c) < c$$

אבל $c < d$, בסתירה למינימליות של d.

תרגיל: תהי $\langle A, < \rangle$ סדורה היטב. $f : A \to A$ איזו' סדר. הוכיחו ש$f = I_A$.

הוכחה: f היא פונקציה שומרת סדר ולכן לכל $a \in A$,

$$a \leq f(a)$$

מצד שני, בגלל שf היא איזו' סדר אז יש לה הופכית שהיא גם שומרת סדר, f^{-1}, אז גם עבור f^{-1} אפשר להשתמש בתרגיל הקודם. ולכן לכל $a \in A$

$$a \leq f^{-1}(a)$$

בפרט,

$$f(a) \leq f^{-1}(f(a)) = a$$

כלומר קיבלנו ש

$$f(a) \leq a \wedge a \leq f(a)$$

$$(f(a) < a \vee f(a) = a) \wedge (a < f(a) \vee a = f(a))$$

לכן $f(a)=a$.

תרגיל: יהיו A,B קבוצות סדורות היטב, איזומורפיות סדר. הוכיחו שהאיזו' סדר בינהן הוא יחיד. (כלומר, קיים $f:A\to B$ איזו' סדר. אין איזו' סדר אחר מA לB)

הוכחה: נניח שיש

$$f,g:A\to B$$

איזו סדר. נרצה להראות שהם שווים.

$g^{-1}:B\to A$ הוא איזו' סדר. ברור שהרכבה של איזו' סדר היא איזו' סדר (תשתכנעו)

$$g^{-1}\circ f:A\to A$$

איזו' סדר. לכן $g^{-1}\circ f=I_A$, לכן $f=g$.

סודרים

הגדרה: קבוצה A נקראת $\in$- טרנזיטיבית (טרנזיטיבית) אם:

$$\forall y\in A,\forall x\in y\Longrightarrow x\in A$$

דוגמאות:

1. $\emptyset$ מקיימת את התנאי באופן ריק.
2. $\{\emptyset\}$ מקיימת את התנאי באופן ריק.
3. $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$ טרנזיטיבית.
4. $\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\}\}$ טרנזיטיבית.
5. $\{\emptyset,\{\{\emptyset\}\}\}$- לא טרנזיטיבית.

תרגיל:

תהי A קבוצה טרנזיטיבית. הוכיחו ש$A\cup\{A\}$ טרנזיטיבית.

פתרון: נניח ש $x\in y\in A\cup\{A\}$. $y\in A\cup\{A\}$ גורר שתי אפשרויות:

1. $y\in A$. מכיוון שA טרנזיטיבית אז $x\in A$.
2. $y\in\{A\}$, כלומר $y=A$. לכן $x\in A$.

$x\in A$ גורר $x\in A\cup\{A\}$.

תרגיל:

1. חיתוך של קבוצות טרנזיטיביות היא קבוצה טרנזיטיבית. כלומר, נניח ש$F=\{A_i\}_{i\in I}$ היא קבוצה של קבוצות טרנזיטיביות. אז $\bigcap F=\cap_{i\in I}A_i$ היא קבוצה טרנזיטיבית.
2. איחוד של קבוצות טרנזיטיביות היא קבוצה טרנזיטיבית. כלומר, נניח ש$F=\{A_i\}_{i\in I}$ היא קבוצה של קבוצות טרנזיטיביות. אז $\bigcup F=\cup_{i\in I}A_i$ היא קבוצה טרנזיטיבית.

הוכחה:

1. יהיו $x\in y\in\bigcap F$. $y\in\bigcap F$ זה אומר שלכל $i\in I$, $y\in A_i$. כל A_i היא קבוצה טרנזיטיבית, לכן $x\in A_i$ לכל i, לכן $x\in\cap_{i\in I}A_i$.
2. $x\in y\in\bigcup F$. $y\in\bigcup A_i$ גורר שקיים $i\in I$ כך ש$y\in A_i$. A_i טרנזיטיבית לכן $x\in A_i$ ולכן $x\in\bigcup A_i$.

בתרגול תוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:

1.. A טרנזיטיבית.

2. לכל $x \in A$, $x \in P(A)$

3. $A \subseteq P(A)$

4. $\cup A \subseteq A$

תרגיל: תהי A קבוצה טרנזיטיבית. הוכיחו ש$P(A)$ טרנזיטיבית.

הוכחה: ידוע ש$A \subseteq \bigcup P(A)$ כי זה איחוד של תתי קבוצות של A.

כעת מתנאי שקול 3, A טרנזיטיבית ולכן $A \subseteq P(A)$.

גורר:

$$\bigcup P(A) \subseteq P(A)$$

מתנאי שקול 4 נקבל ש$P(A)$ טרנזיטיבית.

הגדרה: קבוצה A תקרא "סודר" אם היא:

1. טרנזיטיבית.
2. סדורה היטב ע"י היחס $\in$. (כלומר, היחס סדר על A הוא:

$$x < y \iff x \in y)$$

דוגמאות:

1. $\emptyset$- סודר.
2. $\{\emptyset\}$- סודר.
3. $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ סודר.
4. $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$- לא סודר, כי יחסות השייכות לא יוצר יחס סדר קווי, ובפרט זה לא סדר טוב.

צעד אחורה: היחס "$\in$" על הקבוצה הוא בכלל לא יחס סדר כי הוא לא טרנזיטיבי.

5. $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$- סודר.

הערה: לכל סודר מתקיים $A \notin A$.

הסבר: אם $A \in A$, אז בתוך הסודר A יש איבר שמתייחס לעצמו. סתירה לכך ש$\in$ הוא יחס סדר, ובפרט אנטירפלקסיבי.

תרגיל: יהי A סודר. הוכיחו ש$A \cup \{A\}$ סודר.

הוכחה: A סודר ולכן קבוצה טרנזיטיבית. הוכחנו ש$A \cup \{A\}$ הוא גם קבוצה טרנזיטיבית.

כעת נוכיח ש$\in$ הוא יחס סדר.

כלומר, אנטי-רפלקסיבי וטרנזטיבי.

(הערה: העובדה שA היא קבוצה טרנזיטיבית, אומרת שאם $x \in y \in A$ אז $x \in A$. להוכיח ש$\in$ הוא יחס טרנזיטיבי על A, זה בעצם להוכיח שאם $x \in y \in z$ איברים בA, אז $x \in z$)

אנטי-רפלקסיבי: יהי $x \in A \cup \{A\}$ צריך להוכיח ש$x \notin x$. אם $x \in A$ $x \notin x$ כי A היא סודר וזה בפרט אומר ש$\in$ יוצר יחס סדר על A.

אם $x \in \{A\}$ אז $x = A$, ובהערה קודמת אמרנו ש$A \notin A$ לכל סודר.

טרנזיטיביות: יהיו $x, y, z \in A \cup \{A\}$ כך ש $x \in y \in z$.

אם $z \in A$, מטרנזיטיביות A נקבל ש$y \in A$, עוד פעם מטרנזיטיביות A נקבל ש$x \in A$. כעת מכיוון שA סודר נקבל $x \in z$.

אם $z \in \{A\}$ אז $z = A$. כלומר $x \in y \in A$. מטרנזיטיביות A, $x \in A$.

סדר טוב: תהי $\emptyset \neq B \subseteq A \cup \{A\}$.

נסתכל על $B \cap A$. אם $B \cap A = \emptyset$ זה אומר ש$B = \{A\}$ ואז ברור שיש איבר ראשון.

אחרת, $\emptyset \neq B \cap A \subseteq A$, אז מכיוון ש$A$ סדורה היטב ע"י $\in$ יש בה איבר ראשון, נקרא לו x.

כלומר, לכל $y \in B \cap A$,

$$x = y \vee x \in y$$

אם $B \notin A$, סיימנו. x הוא איבר ראשון בB.
אם $B \in A$, אז $x \in A$ (כי $x \in B \cap A$) ולכן עדיין x הוא איבר ראשון בB.

טענה: יהי A סודר ו$B \subseteq A$ תת קבוצה טרנזיטיבית. הוכיחו שB סודר. יתר על כן, $B = A$ או $B \in A$.

הוכחה: בסוף ההרצאה הקודמת הוכחנו שתת קבוצה של קבוצה סדורה היטב היא גם סדורה היטב (עם אותו יחס סדר כמובן). לכן B סדורה היטב ע"י $\in$. והיא קבוצה טרנזיטיבית מהנתון.
לכן B סודר.
אם $B = A$ סיימנו.
אחרת, $A \setminus B \neq \emptyset$. נסמן $b = \min A \setminus B$. כמובן ש$b \in A$.
נוכיח ש$b = B$.
כלומר, צריך להוכיח שוויון של קבוצות.
נראה הכלה דו כיוונית.

$b \subseteq B$. יהי $a \in b$. מכיוון שb הוא האיבר הראשון בקבוצה A שלא שייך לB, אז כל איבר שקטן מb לפי היחס סדר של הקבוצה A, כן שייך לB. היחס על הקבוצה A הוא היחס $\in$.
לכן $a \in B$.

$B \subseteq b$: יהי $a \in B$. רוצים להוכיח ש$a \in b$. $a, b \in A$. A סדורה היטב ע"י $\in$, בפרט $\in$ הוא סדר קווי על A. כלורמ, יש 3 אפשרויות:
1. $a \in b$
2. $a = b$
3. $b \in a$.

אם:
1. אז סיימנו.
2. אז נקבל ש$b \in B$ בסתירה להגדרה של b (האיבר המינימלי שלא שייך לB).
3. $b \in a \in B$ אז מטרנזיטיביות של B נקבל ש$b \in B$ ושוב אותה סתירה.

מש"ל.

טענה: יהי A סודר ו$B \in A$. אז B סודר.
הוכחה: ראשית נוכיח שB טרנזיטיבית.
נניח ש$x \in y \in B$. מכיוון ש$B \in A$ כבר ראינו שאפשר להסיק שגם $x, y \in A$. ואז מכיוון ש$\in$ הוא יחס סדר על A, אז הוא טרנזיטיבי, כלומר נקבל ש$x \in B$.
מכיוון שA טרנזיטיבית ו$B \in A$ אז לכל $x \in B$ מתקיים $x \in A$. כלומר, $B \subseteq A$.
ולכן B סדורה היטב ע"י $\in$, כתת קבוצה של קבוצה סדורה היטב.

טענה: תהי F קבוצה לא ריקה של סודרים. אז $\bigcap F$ הוא סודר, והוא האיבר הראשון בF עם היחס $\in$. כלומר, הוא איבר בקבוצה, והוא שייך לכל איברי הקבוצה.

הוכחה:
ראשית נוכיח שהחיתוך הוא סודר.
הוכחנו היום שחיתוך של קבוצות טרנזיטיביות היא קבוצה טרנזיטיבית, לכן $\bigcap F$ הוא טרנזיטיבי.
כעת יהי $A \in F$. אז $\bigcap F \subseteq A$, כלומר הוא תת קבוצה של קבוצה סדורה היטב ע"י $\in$, ולכן סדור היטב ע"י $\in$.
שלב שני: נוכיח שהוא שייך לקבוצה. מהגדרת החיתוך, $\bigcap F \subseteq A$ לכן $A \in F$.
ראינו שתת קבוצה טרנזיטיבית של סודר היא או שווה לסודר או שייכת לו.
$\bigcap F$ הוא קבוצה טרנזיטיבית.
לכן לכל $A \in F$, $(\bigcap F = A) \vee (\bigcap F \in A)$
אם הוא לא שווה לשום $A \in F$, אז לכל $A \in F$, $\bigcap F \in A$. מהגדרת חיתוך נקבל

$$\bigcap F \in \bigcap F$$

אבל $\bigcap F$ הוא סודר, וכבר אמרנו שסודר לא שייך לעצמו. לכן זה לא יכול לקרות.
ולכן קיים $A \in F$, $\bigcap F = A$. כלומר, $\bigcap F \in F$.
לבסוף, לכל $A \in F$ כך ש$\bigcap F \neq A$, מתקיים $\bigcap F \in A$.
מסקנה: לכל שני סודרים A, B מתקיים:

$$(A = B) \vee (A \in B) \vee (B \in A)$$

הוכחה: נסתכל על $\{A, B\}$
נסתכל על $A \cap B$.
$A \cap B \subseteq A$
$A \cap B \subseteq B$
$A \cap B$ הוא חיתוך של קבוצות טרנזיטיביות ולכן טרנזיטיבי.
מטענה קודמת קודמת, תת קבוצה טרנזיטיבית של סודר היא או שווה לו או שייכת אליו.
כלומר, $A \cap B = A$ או $A \cap B \in A$.
באותו אופן $A \cap B = B$ או $A \cap B \in B$
לא ייתכן ש$A \cap B \in A \wedge A \cap B \in B$ כי אז

$$A \cap B \in A \cap B$$

וזה סתירה כי $A \cap B$ הוא סודר (כחיתוך של סודרים- מהטענה האחרונה)
ולכן $A \cap B = A$ או $A \cap B = B$.
אם הוא שווה לשניהם אז $A = B$.
אחרת, $A \cap B = A$ ו$A \cap B \in B$ לכן $A \in B$
או $A \cap B = B$ ו$A \cap B \in A$ לכן $B \in A$