תרגול 4 – טופולוגיה

<u>קומפקטיות</u>

<u>הגדרות</u>: כיסוי פתוח/ תת כיסוי

1. יהי M מ"מ. אוסף של קבוצות פתוחות $M \supseteq \{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ יקרא "כיסוי פתוח של M" אם $M = \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$.
2. אם $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ הוא כיסוי של M ו- $J \subseteq I$ היא תת קבוצה של אינדקסים כך ש- $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ הוא כבר בעצמו כיסוי של M, אזי נאמר ש- $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ הוא "תת-כיסוי".

<u>הגדרה</u>: מרחב מטרי קומפקטי

מ"מ M נקרא "קומפקטי" אם לכל כיסוי פתוח יש תת-כיסוי סופי.

(הגדרה שקולה: M קומפקטי אם לכל תת קבוצה אינסופית של M יש נקודת הצטברות).

<u>תרגיל</u>

מרחב מטרי דיסקרטי הוא קומפקטי אמ"מ הוא סופי.

<u>פתרון</u>

$\Leftarrow$: מתקיים $M = \bigcup_{x\in M}\{x\}$. שימו לב שזהו כיסוי פתוח של M. M קומפקטי ולכן קיים תת-כיסוי סופי: $M = \bigcup_{x\in A}\{x\}$ (כאשר $A \subseteq M$ ת"ק סופית) ולכן M סופי.

$\Rightarrow$: תרגיל.

מש"ל

<u>תרגיל</u>

הראו שתת המרחב הבא אינו קומפקטי: $(0,1] \subseteq \mathbb{R}$.

<u>פתרון</u>

נשים לב שמתקיים $(0,1] = \bigcup_{2\le n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{n},1\right]$ וזהו כיסוי פתוח של תת המרחב. עם זאת, נראה שלכיסוי זה אין תת כיסוי סופי.

נניח בשלילה כי קיים $k>0$ המקיים: $(0,1]=\bigcup_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{n_i},1\right]$. נתבונן ב-

$\varepsilon=\min\left\{\frac{1}{n_i}:1\le i\le k\right\}>0$. ניתן לראות כי מתקיים $\frac{\varepsilon}{2}\notin\bigcup_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{n_i},1\right] \wedge \frac{\varepsilon}{2}\in(0,1]$ בסתירה

לכך שזהו כיסוי. לכן $(0,1]$ אינו קומפקטי.

מש"ל

<u>תרגיל</u>

הוכיחו שלתת קבוצה סופית במרחב מטרי אין נקודות הצטברות.

<u>פתרון</u>

תהי $A\subseteq(X,d)$ תת קבוצה סופית. נניח בשלילה ש- $a\in X$ היא נקודת הצטברות של A.

הוכחתם שקיימת סדרה $\{x_n\}\subseteq A$ שכל איבריה שונים זה מזה המתכנסת ל- a. אבל,

$|\{x_n\}|=\aleph_0$, בסתירה לכך ש-A סופית.

מש"ל

<u>מוטיבציה</u>: ראיתם בהרצאה שמרחב מטרי הוא קומפקטי אם ורק אם לכל תת קבוצה אינסופית יש נקודת הצטברות. לכן ניתן להוכיח שמרחב מטרי אינו קומפקטי על ידי הצבעה על תת קבוצה אינסופית <u>ללא</u> נקודת הצטברות.

- בתרגיל הבא נראה, בין השאר, ש- □ לא קומפקטי, שכן יש לו תת קבוצה אינסופית ללא נקודות הצטברות (שהיא □).

<u>תרגיל</u>

הוכיחו כי ל- $□\subseteq□$ אין נקודות הצטברות, והסיקו שהיא קבוצה סגורה.

<u>פתרון</u>

תהי $\{x_n\}\subseteq□$ כך ש- $x_n\to x\in□$. נראה שהסדרה היא קבועה לבסוף ומכך נסיק את הדרוש.

כל סדרה מתכנסת היא קושי, ומכיוון שמתקיים $\forall x_n \neq x_m \quad d\left(x_n, x_m\right) \geq 1$ ניתן לראות כי הסדרות היחידות שהן קושי הן הקבועות לבסוף.

נותר כעת להראות שאין לקבוצה נקודות הצטברות.

נניח בשלילה ש- $x \in □$ היא נקודת הצטברות של □. אזי קיימת סדרה $\left\{x_n\right\} \subseteq □ \setminus \{x\}$ כך ש- $x_n \to x$. אך זה לא יתכן, שכן הסדרה צריכה להיות קבועה לבסוף, כלומר קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ $x_n = x$ וזאת סתירה.

מש"ל

<u>תרגיל</u>

הוכיחו כי כל תת קבוצה לא ריקה בת מניה ב- $\mathbb{R}$ אינה פתוחה.

<u>פתרון</u>

תהי $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ בת מניה. קיימת $a \in A$. נניח בשלילה ש- A פתוחה. קיים $\varepsilon > 0$ כך ש- $B(a,\varepsilon) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq A$. אך מתקיים $|A| \leq \aleph_0$ ועם זאת $\left|(a-\varepsilon, a+\varepsilon)\right| = \aleph$ וזאת סתירה.

מש"ל

<u>תזכורת מההרצאה</u>: מרחב מטרי הוא קומפקטי אם ורק אם לכל סדרה יש תת סדרה מתכנסת במרחב.

<u>למה</u> (אתם מוזמנים לנסות בבית)

יהי (X,d) מרחב מטרי ותהי $\left\{x_n\right\} \subseteq X$ סדרת קושי. אם $\left\{x_{n_k}\right\}$ תת סדרה שמתכנסת ל- x אזי גם $\left\{x_n\right\}$ מתכנסת ל- x.

<u>תרגיל</u>

הוכיחו כי כל מרחב מטרי קומפקטי הוא שלם.

<u>פתרון</u>

יהי (X,d) מרחב מטרי קומפקטי. תהי $\{x_n\}\subseteq X$ סדרת קושי ונראה שקיים $x\in X$ כך ש-$x_n\to x$. X קומפקטי ולכן לסדרה יש תת סדרה מתכנסת במרחב: $x_{n_k}\to x$ ולפי הלמה, גם $x_n\to x$.

מש"ל

<u>מסקנה</u>

$(\square,d_5)$ ו- $\square$ אינם קומפקטיים. (להזכיר משיעור שעבר)

הסבר: המרחבים $(\square,d_5)$ ו- $\square$ אינם שלמים.

הערה : שלם $\not\Rightarrow$ קומפקטי. לדוגמה, קחו את $\square$.

<u>הגדרות:</u>

א. יהי (X,d) מ"מ. נאמר ש $A\subseteq X$ חסומה אם קיים $M>0$ כך שלכל $x,y\in A$ מתקיים $d(x,y)\le M$.

ב. אם $A=X$ חסומה ב-(X,d) נאמר שהמטריקה d חסומה.

<u>תרגיל</u>

א. תהי X קבוצה ויהיו $d,\tilde{d}$ שתי מטריקות שקולות על קבוצה זו. תהי $A\subseteq X$.
הוכיחו: $A\subseteq(X,d)$ קומפקטי אמ"מ $A\subseteq(X,\tilde{d})$ קומפקטי.

ב. יהי $(\square,d)$ מ"מ עם המטריקה הסטנדרטית. מצאו מטריקה נוספת $\tilde{d}$ על $\square$ אשר שקולה ל- d ומתקיים: קיימת קבוצה $A\subseteq(\square,\tilde{d})$ סגורה וחסומה כך ש- A אינו תת מרחב קומפקטי של $(\square,d)$ (ולכן גם לפי סעיף א' אינו ת"מ קומפקטי של $(\square,\tilde{d})$).

<u>פתרון</u>

א. נוכיח רק את אחד הכיוונים: אם $A\subseteq(X,d)$ קומפקטי אזי $A\subseteq(X,\tilde{d})$ קומפקטי. תהי $\{x_n\}\subseteq A$ ונראה שיש לה ת"ס מתכנסת לפי $\tilde{d}$. ל- $\{x_n\}$ יש ת"ס מתכנסת לפי d, ומכיוון שהמטריקות שקולות – זוהי תת סדרה מתכנסת לפי $\tilde{d}$.

ב. נבחר בתור $\tilde{d}$ את המטריקה החסומה $\tilde{d}(x,y)=\dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$. כעת, תהי $A=(-\infty,0]$. היא סגורה לפי d ולכן סגורה לפי $\tilde{d}$; היא חסומה לפי $\tilde{d}$ (כי זו מטריקה חסומה). עם זאת, A אינו תת מרחב קומפקטי של $(\mathbb{R},d)$.

מש"ל

<u>**דוגמה**</u>- (אם ישאר זמן)

ראינו שהסדרה $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ אינה מתכנסת במרחב ℓ_∞ שכן אינה קושי. קל לראות שלמעשה כל תת סדרה $\{e_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ אינה קושי ולכן אינה מתכנסת. מצאנו סדרה ללא תתי סדרות מתכנסות. מכאן המרחב המטרי ℓ_∞ אינו קומפקטי.

<u>הגדרה</u> – **טופולוגיה**

מרחב טופולוגי הוא זוג (X,τ) כך ש- X היא קבוצה כלשהי, ו- τ הוא אוסף של תתי קבוצות של X המקיים:

א. $\varnothing, X\in\tau$;

ב. בהינתן אוסף כלשהו $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ של קבוצות מ- τ מתקיים $\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha\in\tau$;

ג. בהינתן אוסף סופי $\{U_1,\ldots,U_n\}$ של קבוצות מ- τ מתקיים $\bigcap_{i=1}^{n}U_i\in\tau$.

במקרה זה τ נקראית "טופולוגיה על X", ואיברי τ נקראים "הקבוצות הפתוחות".

<u>הגדרה</u> – **הטופולוגיה הקו-סופית** (co-finite)

$$\tau_{cof}=\{U\subseteq X:|U^C|<\infty\}\cup\{\varnothing\}$$

או במילים אחרות: $A\subseteq X$ סגורה $\Leftrightarrow$ $A=X$ או A סופית.

<u>**תרגיל**</u>

הוכיחו שהטופולוגיה הקו-סופית היא אכן טופולוגיה.

פתרון

במקום להוכיח את שלוש התכונות של הטופולוגיה על הקבוצות הפתוחות, ניתן להוכיח את התכונות המתאימות על הקבוצות הסגורות.

א. $\varnothing, X$ סגורות ($\varnothing$ סגורה כי היא קבוצה סופית).

ב. יהיו $\{V_i\}_{i\in I}$ קבוצות סגורות. מקרה ראשון: $V_i = X \quad \forall i$. במקרה זה $\bigcap_{i\in I} V_i = X$ סגורה. מקרה שני: קיים $i_0 \in I$ כך ש V_{i_0} סופית. קל לראות שגם החיתוך הוא קבוצה סגורה שכן מתקיים $\left|\bigcap_{i\in I} V_i\right| \le \left|V_{i_0}\right| < \infty$.

ג. יהיו V_1, V_2 שתי קבוצות סגורות. מקרה ראשון: $V_1 = X$ או $V_2 = X$ אזי $V_1 \cup V_2 = X$ ונסיק הדרוש. מקרה שני: V_1, V_2 סופיות. $\left|V_1 \cup V_2\right| \le \left|V_1\right| + \left|V_2\right| < \infty$ ולכן גם האיחוד שלהן הוא קבוצה סגורה.