

מבחן מועד א' – 86-147 חדו"א 1 לאודיסאה 10/02/2025 – הצעה לפתרון מאת עדי מכנס

מרצה: ד"ר ארז שיינר משך המבחן: שלוש שעות חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק' ענו על כל השאלות כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{3x} - 1)^3 (2 - e^{2x})^2}{(1 - \cos(5x)) \ln(1 + 7x)}$$

פתרון:

ניעזר בעיקרון WIN:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{3x} - 1)^3 (2 - e^{2x})^2}{(1 - \cos(5x)) \ln(1 + 7x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{(e^{3x} - 1)^3}{(3x)^3}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{(5x)^2}{1 - \cos(5x)}}_{\rightarrow 2} \cdot \underbrace{\frac{7x}{\ln(1 + 7x)}}_{\rightarrow 1} \cdot \frac{(2 - e^{2x})^2 \cdot (3x)^3}{7x \cdot (5x)^2} \\ &= 2 \cdot \frac{(2 - 1)^2 \cdot 27}{7 \cdot 25} = \frac{2 \cdot 27}{7 \cdot 25} \end{aligned}$$

זאת עקב הצבה של פונקציות רציפות בגבולות ידועים.

ב. 
$$\lim_{x \rightarrow \pi} (-\cos(x))^{x-\pi}$$

פתרון:

מדובר במקרה של  $1^\infty$ . ניעזר בכלל ה-e:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} (-\cos(x))^{x-\pi} = e^{\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\cos(x) - 1}{x - \pi}}$$

נחשב את חזקת המעריך:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\cos(x) - 1}{x - \pi} \stackrel{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\sin(x)}{1} \rightarrow 0$$

ולכן הגבול הינו:

$$e^0 = 1$$

ג. 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\sqrt{n}}}{n}$$

פתרון:

נציב  $t = \sqrt{n}$  ולכן:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\sqrt{n}}}{n} \stackrel{t=\sqrt{n}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2^t}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{t \ln(2)}}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(e^t)^{\ln(2)}}{t^1} \rightarrow \infty$$

לפי משפט סדרי הגודל, שכן  $\ln(2) > \ln(1) = 0$

2.

א. חשבו את  $\int \sin^2(x) dx$ .

פתרון:

ניעזר בזהויות טריגונומטריות:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \rightarrow \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \xrightarrow{\text{הצבה}} \cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$$

$$2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$

ולכן:

$$\int \sin^2(x) dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos(2x)) dx = \frac{1}{2} \left( x - \frac{1}{2} \sin(2x) \right) + C$$

ב. חשבו את  $\int \frac{\sin(x)}{\sin^2(x)} dx$ .

פתרון:

ניעזר בזהויות שכתבנו מקודם ונשים לב כי:

$$\int \frac{\sin(x)}{\sin^2(x)} dx = \int \frac{\sin(x)}{1 - \cos^2(x)} dx$$

נציב  $t = \cos(x)$  ולכן:

$$dt = -\sin(x) dx$$

נציב זאת באינטגרל:

$$= - \int \frac{1}{1 - t^2} dt$$

נפרק לשברים חלקיים את האינטגרנד:

$$\frac{1}{1 - t^2} = \frac{1}{(1 - t)(1 + t)} = \frac{A}{1 - t} + \frac{B}{1 + t}$$

נעשה מכנה משותף:

$$1 = A(1 + t) + B(1 - t)$$

נציב  $t = 1$  ונקבל:

$$1 = 2A$$

$$A = \frac{1}{2}$$

כעת נציב  $t = -1$  ונקבל:

$$1 = 2B$$

$$B = \frac{1}{2}$$

ובסה"כ:

$$\begin{aligned} -\int \frac{1}{1-t^2} dt &= -\frac{1}{2} \left( \int \frac{1}{1-t} dt + \int \frac{1}{1+t} dt \right) = -\frac{1}{2} (\ln|1+t| - \ln|1-t|) + C \\ &= -\frac{1}{2} (\ln(1+\cos(x)) - \ln(1-\cos(x))) + C \end{aligned}$$

הערה: שימו לב מדוע אין צורך בערך המוחלט, כיוון ש  $\cos(x) \leq 1$  לכל  $x$ .

3.

א. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה  $\ln(1+e^x) = 2x - e^x$ .

פתרון:

נעביר אגף ונבנה פונקציה:

$$h(x) = \ln(1+e^x) - 2x + e^x$$

ונמצא כמה שורשים יש לפונקציה  $h$ .

נגזור את  $h$ :

$$h'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - 2 + e^x = \frac{e^x - 2 - 2e^x + e^x + e^{2x}}{1+e^x} = \frac{e^{2x} - 2}{1+e^x}$$

כיוון ש  $h$  גזירה בכל הקטע, מתקיים כי נקודות הקיצון היחידות יהיו נק' איפוס הנגזרת.

נשווה את הנגזרת לאפס:

$$\frac{e^{2x} - 2}{1+e^x} = 0$$

$$e^{2x} = 2$$

$$2x = \ln(2)$$

$$x = \frac{\ln(2)}{2}$$

אבל, נשים לב כי:

$$h\left(\frac{\ln(2)}{2}\right) = \ln(1+\sqrt{2}) - \ln(2) + \sqrt{2} > 0$$

(הערה: שימו לב כי  $\frac{\ln(2)}{2} = \ln(\sqrt{2})$ )

שכן  $1 + \sqrt{2} > 2$ , שהרי:

$$1 + \sqrt{2} > 1 + \sqrt{1} = 2$$

(שהרי פונקציית השורש עולה לכל  $x \geq 0$ )

ומכיוון שפונקציית  $\ln(x)$  אף היא עולה ממש לכל  $x > 0$ , מתקיים כי  $\ln(1 + \sqrt{2}) - \ln(2) > 0$  ובסך הכל קיבלנו גודל חיובי (ממש).

מכאן משמע כי לכל  $x$ , מתקיים כי  $h(x) \geq h\left(\frac{\ln(2)}{2}\right) > 0$  ולכן אין שורשים כלל – דהיינו אין פתרונות למשוואה כלל.

ב. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה  $\ln(1 + e^x) = 2x + e^x$ .

פתרון:

נעביר אגף ונבנה פונקציה:

$$h(x) = \underbrace{\ln(1 + e^x)}_{<0} - 2x - e^x$$

לכן כמות השורשים של  $h$  היא כמות הפתרונות למשוואה.

נשים לב, כבר עכשיו כי  $h(x)$  רציפה (כצירוף רציפות) וכן גזירה, כצירוף גזירות – בכל  $\mathbb{R}$ .

נגזור את  $h$ :

$$h'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} - 2 - e^x = \frac{e^x - 2 - e^x - e^x - e^{2x}}{1 + e^x} = \frac{-e^{2x} - e^x - 2}{1 + e^x} = -\frac{e^{2x} + e^x + 2}{1 + e^x}$$

נבדוק נקודות איפוס של הנגזרת:

$$\frac{e^{2x} + e^x + 2}{1 + e^x} = 0$$

$$e^{2x} + e^x + 2 = 0$$

נציב  $t = e^x$  ולכן:

$$t^2 + t + 2 > 0$$

אבל אין פתרונות למשוואה הזו! לכן הנגזרת של  $h$  שלילית לכל  $x$  (לא לשכוח את המינוס) ומכאן שיש לכל היותר שורש אחד לפונקציה  $h$ .

מצד שני:

$$h(0) = \ln(1 + 1) - 1 = \ln(2) - 1$$

אבל  $\ln(2) < \ln(e) = 1$  (שהרי  $\ln(x)$  עולה ממש לכל  $x$ ) ולכן  $h(0) \leq 0$ .

וכן:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{\ln(1 + e^x)}_{\rightarrow \ln(1)=0} - \underbrace{2x}_{\rightarrow -\infty} - \underbrace{e^x}_{\rightarrow 0} = \infty$$

ולכן קיימת נקודה  $d < 0$  כך ש:  $h(d) > 0$ .

כעת, מכיוון ש  $h$  רציפה בכל  $\mathbb{R}$  - לפי ערך הביניים, קיימת נקודה  $c \in [d, 0]$  כך ש  $h(c) = 0$ .

לכן, יש לפונקציה  $h$  בדיוק שורש אחד – מה שאומר כי למשוואה יש בדיוק פתרון אחד.

4. תהי  $f$  פונקציה הגזירה בנק'  $x_0$  ונביט ב  $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  או הפריכו: למשוואה  $f(x) = g(x)$  יש בדיוק פתרון אחד.

פתרון: הפרכה

נביט בפונקציה הקבועה:

$$f(x) = 17$$

(שגזירה בכל  $\mathbb{R}$  ובפרט בנקודה  $x_0 = 42$ ). לכן:

$$g(x) = f(42) + f'(42)(x - 42) = 17$$

אבל  $17 = 17$  ולכן יש אינסוף פתרונות למשוואה  $f(x) = g(x)$ .

ב. הוכיחו או הפריכו: קיימת סביבה של  $x_0$  בה למשוואה  $f(x) = g(x)$  יש בדיוק פתרון אחד.

פתרון: הפרכה

ניקח את אותה הפונקציה (והנקודה) מהדוגמה הקודמת:

$$f(x) = 17$$

$$g(x) = 17$$

ולכן לכל סביבה של  $x_0 = 42$  יש אינסוף פתרונות, שכן כל  $x \in \mathbb{R}$  מהווה פתרון למשוואה  $17 = 17$ .

הערה: למעשה, מדובר כאן במשוואת המשיק בנקודה  $x_0$ , שזהו קו ישר. אבל המשיק לקו ישר הוא תמיד עצמו.

5. תהי סדרה  $a_n$  המקיימת לכל  $n$  כי  $a_{n+1} = \frac{6}{a_n} + 1$  וכי  $a_1 = 1$ . נסמן את סדרת האיברים במקומות

הזוגיים  $b_n = a_{2n}$ .

א. הוכיחו כי  $b_n$  מונוטונית.

פתרון:

תחילה נכתוב נוסחה רקורסיבית עבור  $b_n$ .

$$b_{n+1} = a_{2n+2} = \frac{6}{a_{2n+1}} + 1 = \frac{6}{\frac{6}{a_{2n}} + 1} + 1 = \boxed{\frac{6}{\frac{6}{b_n} + 1} + 1}$$

וכן:  $b_1 = a_2 = \frac{6}{1} + 1 = 7$ .

נוכיח כי  $b_n$  היא סדרה מונוטונית עולה.

יהי  $n$  טבעי. צ"ל:

$$b_{n+1} \leq b_n$$

$$b_{n+1} - b_n \leq 0$$

$$\frac{6}{\frac{6}{b_n} + 1} + 1 - b_n \leq 0$$

נוכיח בסוף כי  $b_n > 0$  ולכן ניתן להכפיל במכנה:

$$6 + \frac{6}{b_n} + 1 - b_n \left( \frac{6}{b_n} + 1 \right) \leq 0$$

$$6 + \frac{6}{b_n} + 1 - 6 - b_n \leq 0$$

$$-b_n + 1 + \frac{6}{b_n} \leq 0$$

$$-b_n^2 + b_n + 6 \leq 0$$

$$b_n^2 - b_n - 6 \geq 0$$

$$x \leq -2 \vee x \geq 3$$

כעת, נוכיח כי  $0 < 3 \leq b_n$  ובכך נקבל הדרוש (גם מונוטוניות וגם חיוביות). זאת באינדוקציה על  $n$ .

בסיס: אכן, עבור  $n = 1$  מתקיים כי  $b_1 = 7$  ואכן מתקיים הנ"ל.

צעד: יהי  $n$  עבורו הטענה מתקיימת. צ"ל עבור  $n + 1$ .

לכן צ"ל כי:

$$3 \leq b_{n+1} = \frac{6}{\frac{6}{b_n} + 1} + 1$$

נכפיל את שני האגפים במכנה:

$$\frac{18}{b_n} + 3 \leq \frac{6}{b_n} + 1 + 6$$

(מהנחת האינדוקציה מתקיים בפרט כי  $b_n \geq 0$  ולכן כלל המכנה חיובי).

$$18 + 3b_n \leq 6 + 7b_n$$

$$12 \leq 4b_n$$

$$3 \leq b_n$$

■ משל

ב. חשבו את גבול הסדרה  $b_n$ .

פתרון:

בסעיף הקודם הוכחנו כי  $b_n$  גם מונוטונית יורדת וגם חסומה (ע"י 3) ולכן מתכנסת לגבול סופי  $b_n \rightarrow L \in \mathbb{R}$ .

נשאיף את שני צידי נוסחת הנסיגה:

$$L \leftarrow b_{n+1} = \frac{6}{\frac{6}{b_n} + 1} + 1 \rightarrow \frac{6}{\frac{6}{L} + 1} + 1$$

וכעת:

$$L = \frac{6}{\frac{6}{L} + 1} + 1$$

$$6 + L = 6 + \frac{6}{L} + 1$$

$$6L + L^2 = 6L + 6 + L$$

$$L^2 - L - 6 = 0$$

$$L = -2, 3$$

נשים לב כי  $3 \leq b_n$  ולכן לא ייתכן כי  $b_n \rightarrow -2$ . מכאן חייב להתקיים כי  $b_n \rightarrow L = 3$ .

6.

א. חשבו את גבול הסדרה

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$

פתרון:

נשים לב כי:

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n(1+\frac{k}{n})} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right)$$

כאשר  $f(x) = \frac{1}{x+1}$ . כמו כן,  $f$  רציפה בקטע  $[0,1]$  ולכן לפי משפט סכום רימן מההרצאה:

$$a_n \rightarrow \int_0^1 f(x) dx = [\ln(x+1)]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$$

ב. הוכיחו כי  $\sqrt{8} > e$ .

פתרון:

אציג מספר דרכים לפתור את בעיה זו, מהמתחכמת ביותר לפחות.

(1) נעלה בריבוע את שני אגפי השוויון (מותר כי שני הצדדים חיוביים).

$$8 > e^2$$

אבל, ראינו בהרצאה כי  $e = 2.71 \dots$  ולכן  $e > 2.8$ . לכן:

$$e^2 < 2.8^2 = 7.84 < 8$$

■ משל

הערה: היה רצוי יותר אילו הייתם מקרבים את  $e$  בעזרת פולינום טיילור ממש, כי זה משפט "לא פורמלי" מההרצאה.

(2) נעלה בריבוע את שני אגפי השוויון (כמו מקודם):

$$8 > e^2$$

ונחשב את  $e^2$  עד כדי שגיאה של  $\frac{1}{10}$ .

נחש לפי פולינום הטיילור של  $e^x$  סביב הנק'  $x_0 = 0$

$$f(x) = e^x$$

$$f^{(n)}(x) = e^x$$

כעת, השגיאה מסדר  $n$  היא:

$$R_n(e^x, 0)(2) = \left| \frac{e^c \cdot (2-0)^{n+1}}{(n+1)!} \right|$$

כאשר  $0 < c < 2$

והרי:

$$\left| \frac{e^c \cdot (2-0)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \frac{3^2 \cdot 2^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{1}{10}$$

קל לראות כי עבור  $n = 7$  מתקיים הנ"ל ולכן כל שנותר הוא להציב בפולינום טיילור:

$$P_7(e^x, 0)(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!}$$

$$P_2(e^x, 0)(2) = 7 \frac{8}{21}$$

ולכן:

$$e^2 \leq 7 \frac{8}{21} + \frac{1}{10} = 7 \frac{101}{210} < 8$$

■ משל