

תרגול 9 קומבינטוריקה

21 בדצמבר 2020

1 הכלה והדחה

תרגילים:

1. חמישה זוגות יושבים על ספסל. בכמה סידורי ישיבה לפחות זוג אחד יושבים אחד ליד השני?

פתרון שגוי: נבחר זוג מהחמישה ונצמיד אותם. ואז נסדר את הזוג הצמוד פלוס 8 הנותרים ב- $9!$ אפשרויות. כיון שיש 5 זוגות ושתי אפשרויות להצמדת הזוג הנבחר נקבל בסה"כ $10! = 10 \cdot 9!$. טעות: אנחנו סופרים הרבה סידורים פעמיים. נניח שזוג 1 הוא הנבחר להיצמד, ובמקרה זוג 3 יצא ביחד. סידור זה נספר גם כאשר זוג 3 נבחר להיצמד ובמקרה זוג 1 יצא ביחד.

אפשרות אולי: נחשב כמה סידורים ישנם בהם אף זוג לא יושבים יחד (ונחסר מ- $10!$): קבוצה A מכילה את כל הסידורים. קבוצה B את כל הסידורים שאף זוג לא יושב יחד. קבוצה C את כל הסידורים שלפחות זוג אחד יחד. ונקבל $|C| = |A| - |B|$. חישוב $|B|$: יש 10 אפשרויות למקום הימני ביותר. כעת ליד יכולים לשבת 8 אנשים (כי בן זוגו לו). ליד הנבחר יכולים לשבת 7 אנשים. ליד הנבחר יכולים לשבת ??? פה אנחנו בבעיה כי אולי הוא בן זוג של הימני ביותר, ואולי לא.

פתרון נכון: נגדיר קבוצות A_i ע"י: כל הסידורים בהם הזוג ה- i יושב יחד. אנחנו מחפשים את $\left| \bigcup_{i=1}^5 A_i \right|$. כדי לחשב את האיחוד נחשב תחילה את גדלי הקבוצות:

$$\forall i : |A_i| = 2 \cdot 9!$$

2 אפשרויות לסידור הזוג, ו- $9!$ אפשרויות לסידור הזוג עם השמונה הנותרים. חיתוכים:

$$\forall i \neq j : |A_i \cap A_j| = 2 \cdot 2 \cdot 8!$$

2 אפשרויות לסידור הזוג ה- i , 2 לזוג ה- j , ו- $8!$ לסידור שני נציגי הזוגות והשישה הנותרים.

עבור חיתוכים של 3 קבוצות:

$$2^3 \cdot 7!$$

חיתוכי 4 ארבע קבוצות:

$$2^4 6!$$

חיתוך כל החמש:

$$2^5 5!$$

באופן כללי: חיתוך של k קבוצות זה

$$2^k (10 - k)!$$

כמה אפשרויות יש לחיתוך של k קבוצות מתוך 5?

$$\binom{5}{k}$$

ולכן הפתרון הוא:

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^5 A_i \right| &= \binom{5}{1} \cdot 2^1 \cdot (10-1)! - \binom{5}{2} 2^2 (10-2)! + \binom{5}{3} 2^3 (10-3)! - \binom{5}{4} 2^4 (10-4)! + \binom{5}{5} 2^5 (10-5)! = \\ &= \sum_{k=1}^5 (-1)^{k+1} \binom{5}{k} 2^k (10-k)! \end{aligned}$$