בס"ד

דוגמאות לשאלות בחנים שהיו בשנים קודמות :

אל תשימו לב למספור ☺

3. אין קשר בין הסעיפים :

א. האם הקבוצה הנ"ל היא בסיס ל- $\mathbb{R}_2[x]$? (9)

$$\left\{1-x+x^2,-3+4x-x^2,1-2x-2x^2\right\}$$

ב. מצאו בסיס לתת המרחב : $\left\{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}\middle|\begin{matrix}2a+b-c=0\\ b+c+2d=0\end{matrix}\right\}$.(6)

פתרון:

א.נעביר את הפולינומים $\left\{1-x+x^2,-3+4x-x^2,1-2x-2x^2\right\}$ לצורה וקטורית ונדרג בשורות :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}\longrightarrow\cdots\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

קיבלנו שהוקטורים בת"ל ולכן יש לנו 3 וקטורים בת"ל. ידוע ש $\dim\mathbb{R}_2[x]=3$ ולכן לפי השלישי חינם נקבל שהקבוצה היא אכן בסיס ל $\mathbb{R}_2[x]$.

ב. נמצא מה משמעות התנאים הנתונים :

$$\begin{cases}2a+b-c=0\\ b+c+2d=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=2a+b\\ 2d=-b-c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=2a+b\\ 2d=-b-(2a+b)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=2a+b\\ 2d=-2a-2b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=2a+b\\ d=-a-b\end{cases}$$

כלומר המרחב הנתון הוא המרחב המקיים : $\begin{pmatrix} a & b \\ 2a+b & -a-b \end{pmatrix}$.

"נפרק" אותו לצי"ל של מטריצות בת"ל :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2a+b & -a-b \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

קל לראות ששתי המטריצות $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ הן בת"ל וכיון שהראנו שהן פורשות כל מטריצה במרחב הן הבסיס לתת המרחב המוגדר .

5. הוכיחו או הפריכו: (30 נק')

א. אם קבוצת וקטורים $A \subseteq V$ ת"ל, כל וקטור $v \in A$ הוא צי"ל של השאר.

ב. כל תת קבוצה של קבוצה בת"ל היא בת"ל.

פתרון :

א. לא נכון ! לדוגמה הקבוצה : $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

כמובן שהיא ת"ל כי קיים צי"ל ל"ט : $2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ אולם מאידך

<u>**לא ניתן**</u> לבטא את הוקטור $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ כצי"ל של הוקטורים $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$.

ב. נכון !

הוכחה : תהי $\{v_1,...,v_n\}$ קבוצה בת"ל. נניח בשלילה שקיימת לה תת קבוצה ת"ל.

תהי זו בה"כ הקבוצה $\{v_1,...,v_k\}$ $k \le n,$ ת"ל.

אזי לפי הגדרה קיים צי"ל ל"ט: $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0$ (לפחות אחד הסקלרים שונה מ-0)

ולכן קיים גם צי"ל ל"ט : $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k + 0v_{k+1} + \cdots + 0v_n = 0$

בסתירה לכך שהקבוצה בת"ל!

שאלה :

יהי V מ"ו מעל שדה F.

א. יהיו $A,B\subseteq V$ קבוצות כלשהן. הוכיחו או הפריכו : $sp\left(A\cap B\right)=spA\cap spB$

ב. יהיו $W,U\le V$ ת"מ. הוכיחו או הפריכו : $sp\left(U\cap W\right)=spU\cap spW$.

<u>פתרון:</u>

א. **לא נכון!** דוגמה : $V=\mathbb{R}^2$, $A=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\},B=\left\{\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right\}$

לכן, $A\cap B=\varnothing$ כלומר באגף שמאל : $sp(A\cap B)=sp(\varnothing)=\{\vec{0}\}$

אולם באגף ימין $spA\cap spB=sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}\cap sp\left\{\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right\}=sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

ב. **נכון !**

קודם כל, לכל ת"מ Y מתקיים $SpY=Y$.

כמובן ש $SpY\supseteq Y$. מצד שני גם $SpY\subseteq Y$ כי כל וקטור $v\in SpY$ הוא צי"ל של איברי Y אבל הרי Y הוא ת"מ ויש בו סגירות לחיבור וכפל בסקלר ולכן $v\in Y$.

ולכן : $spW=W$, $spU=U$. ו $U\cap W$ הוא ת"מ כפי שהוכחנו בכיתה הרי שגם $sp(U\cap W)=U\cap W$.

לכן קיבלנו : $\underbrace{spU}_{U}\cap\underbrace{spW}_{W}$ $\underbrace{sp\left(U\cap W\right)}_{U\cap W}$ כלומר : $U\cap W=U\cap W$.

1. ענו על הסעיפים הבאים :

א. V מ"ו מעל F . יהיו $\{\overline{v_1},\overline{v_2},...,\overline{v_n}\}\subseteq V$,ו- $A\in F^{n\times n}$ הפיכה. הוכיחו או הפריכו:

$\{\overline{v_1},\overline{v_2},...,\overline{v_n}\}$ בסיס של V $\Leftrightarrow$ $\{A\overline{v_1},A\overline{v_2},...,A\overline{v_n}\}$ בסיס של V.

פתרון :

כיוון אחד:

נניח ש $\{\overline{v_1},\overline{v_2},...,\overline{v_n}\}$ בסיס של V . מנתון זה נובע בפרט ש $\{\overline{v_1},\overline{v_2},...,\overline{v_n}\}$ בתל ו $\dim V=n$.

היות ובקבוצה $\{A\overline{v_1},A\overline{v_2},...,A\overline{v_n}\}$ יש n וקטורים, לפי השלישי חינם מספיק להוכיח שהוקטורים $\{A\overline{v_1},A\overline{v_2},...,A\overline{v_n}\}$ בת"ל. :

נוכיח זאת : נניח שקיים צ"ל : $\alpha_1A\overline{v_1}+\alpha_2A\overline{v_2}+\cdots+\alpha_nA\overline{v_n}=0$

ניתן "להוציא A " : $A\left(\alpha_1\overline{v_1}+\alpha_2\overline{v_2}+\cdots+\alpha_n\overline{v_n}\right)=0$.

כיוון ש A הפיכה ניתן להכפיל משמאל ב A^{-1} ונקבל : $A^{-1}A\left(\alpha_1\overline{v_1}+\alpha_2\overline{v_2}+\cdots+\alpha_n\overline{v_n}\right)=A^{-1}0$

כלומר $\alpha_1\overline{v_1}+\alpha_2\overline{v_2}+\cdots+\alpha_n\overline{v_n}=0$. אבל ידוע ש $\{\overline{v_1},\overline{v_2},...,\overline{v_n}\}$ בתל ולכן

$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$ כלומר $\{A\overline{v_1},A\overline{v_2},...,A\overline{v_n}\}$ בת"ל.

כיוון הפוך :

נניח ש $\{A\overline{v_1},A\overline{v_2},...,A\overline{v_n}\}$ בסיס של V . מנתון זה נובע בפרט ש $\{A\overline{v_1},A\overline{v_2},...,A\overline{v_n}\}$ בתל ו $\dim V=n$.

היות ובקבוצה $\{\overline{v_1},\overline{v_2},...,\overline{v_n}\}$ יש n וקטורים, לפי השלישי חינם מספיק להוכיח שהוקטורים $\{\overline{v_1},\overline{v_2},...,\overline{v_n}\}$ בת"ל. :

נוכיח זאת : נניח שקיים צ"ל : $\alpha_1\overline{v_1}+\alpha_2\overline{v_2}+\cdots+\alpha_n\overline{v_n}=0$

נכפיל את המשוואה ב A : $A\left(\alpha_1\overline{v_1}+\alpha_2\overline{v_2}+\cdots+\alpha_n\overline{v_n}\right)=0$.

נפתח את הסוגריים ונקבל: $\alpha_1A\overline{v_1}+\alpha_2A\overline{v_2}+\cdots+\alpha_nA\overline{v_n}=0$.

ידוע ש $\{A\overline{v_1},A\overline{v_2},...,A\overline{v_n}\}$ בתל ולכן : $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$.

ולכן לפי השלישי חינם $\{\overline{v_1},\overline{v_2},...,\overline{v_n}\}$ הם בסיס.

ב. אם נתון ש $A \in F^{n\times n}$ אינה הפיכה. כיצד תשתנה תשובתכם ? הסבירו !

פתרון : אם A אינה הפיכה, אם $\left\{\overline{v_1},\overline{v_2},...,\overline{v_n}\right\}$ בסיס של V , $\left\{A\overline{v_1},A\overline{v_2},...,A\overline{v_n}\right\}$ אינו בסיס של V, היות והוקטורים אינם בת"ל , לדוגמה עבור A=0 , $\left\{\bar{0} \quad \cdots \quad \bar{0}\right\} = \left\{A\overline{v_1},A\overline{v_2},...,A\overline{v_n}\right\}$ שכמובן אינם בת"ל.....

מאידך, האם יתכן ש $\left\{A\overline{v_1},A\overline{v_2},...,A\overline{v_n}\right\}$ כאשר A אינה הפיכה יהיו בסיס ?

לא יתכן ש $\left\{A\overline{v_1},A\overline{v_2},...,A\overline{v_n}\right\}$ יהיו בת"ל היות ולהזכירכם $A\overline{v_i}$ הוא צ"ל של עמודות A. A ריבועית ואינה הפיכה ולכן עמודותיה אינן בת"ל. ולכן לא יתכן שיהיו n וקטורים בת"ל ($\left\{\overline{v_1},\overline{v_2},...,\overline{v_n}\right\}$) צ"ל של וקטורים שאינם בת"ל ולכן הכיוון השני לא יתכן כלל!