תרגיל 9- אינפי 4 - תשע"ט

תרגיל 1. הוכיחו את הזהיות הבאות:

1. תהי $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות פעמיים. הראו שמתקיים

$$\nabla\times(\nabla F)=0.$$

2. יהי $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ שדה גזיר ברציפות פעמיים. הראו שמתקיים

$$\operatorname{div}(\nabla\times F)=0.$$

3. יהיו $F,G:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ פונקציות גזירות ברציפות פעמיים. הראו שמתקיים

$$\nabla\times(F\nabla G)=\nabla F\times\nabla G=-\nabla\times(G\nabla F).$$

תרגיל 2. יהי M משטח אוריינטבילי עם שפה מימד 2 ב $\mathbb{R}^3$ ונורמל יחידה רציף. $\hat{n}:M\to\mathbb{R}^3$ נורמל יחידה רציף. נניח שלכל נקודה $x\in M$ יש קבוצה U_x פתוחה ב M, קבוצה פתוחה $E_x\subseteq H^+$ ופרמטריזציה מדרגה 2

$$\phi_x:E_x\to M,$$

כך ש

$$\phi_x(E_x)=U_x.$$

(זאת פשוט הגדרה של משטח עם שפה..). עוד נניח שאם $x\neq y$, אזי

$$\phi_y^{-1}\circ\phi_x:\phi_x^{-1}(U_x\cap U_y)\to\phi_y^{-1}(U_x\cap U_y).$$

היא בעלת יעקוביאן חיובי. הוכיחו שלכל $x\in M$ מתקיים ולכל $u,v\in E_x$ מתקיים

$$\frac{\frac{\partial\phi_x}{\partial u_1}\times\frac{\partial\phi_x}{\partial u_2}}{\left\|\frac{\partial\phi_x}{\partial u_1}\times\frac{\partial\phi_x}{\partial u_2}\right\|}=\hat{n}.$$

או לכל $x \in M$ מתקיים ולכל $u, v \in E_x$ מתקיים

$$\frac{\frac{\partial \phi_x}{\partial u_1} \times \frac{\partial \phi_x}{\partial u_2}}{\left\| \frac{\partial \phi_x}{\partial u_1} \times \frac{\partial \phi_x}{\partial u_2} \right\|} = -\hat{n}.$$

כאשר $\hat{n} = \hat{n}\left(\phi_x\left(u_1, u_2\right)\right)$.

תרגיל 3. טבעת מביוס בעובי a ורדיוס R נתונה כתמונה של הפונקציה $\phi : [0, 2\pi] \times \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right] \to \mathbb{R}^3$ המוגדרת על ידי

$$(x, y, z) = \phi(u, v) = \left(\left(R - v \sin \frac{u}{2}\right) \cos u, \left(R - v \sin \frac{u}{2}\right) \sin u, v \cos \frac{u}{2}\right).$$

1. הראו שאם $a < 2R$ אזי ϕ חח"ע על $(0, 2\pi) \times \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$ ומתקיים $\phi(0, v) = \phi(2\pi, -v)$.
2. הראו ש

$$\frac{\phi'_u \times \phi'_v}{\|\phi'_u \times \phi'_v\|}(0, 0) = -\frac{\phi'_u \times \phi'_v}{\|\phi'_u \times \phi'_v\|}(0, 2\pi).$$

3. בעזרת הסעיף הקודם הראו שטבעת מביוס אינה אוריינטבילית (כלמר שלא ניתן להגדיר את נורמל יחידה על M כפונקמיה רציפה על M).

תרגיל 4. תהי M יריעה עם שפה 2-מימדית ב $\mathbb{R}^3$ ותהי $p \in \partial M$. הראו ש $v \in T_p(M)$ הוא וקטור פנימי אם ורק אם לכל הצגה תיקנית מקומית (כמו בכיתה) של M הממורכזת ב p, אזי

$$v = \alpha \frac{\partial \phi}{\partial u} + \beta \frac{\partial \phi}{\partial v}$$

כאשר $\beta > 0$.