פתרון תרגיל 4 אינפי 2

שאלה 1

האם הפונקציות הבאות אינטגרביליות בקטע $[0,1]$? הוכיחו. אם כן, מצאו את האינטגרל.

1.

$$f(x)=\begin{cases}1 & x=\frac{1}{n} \quad n\in\mathbb{N}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

נוכיח שהפונקציה איניטגרבילית ושהאינטגרל הוא 0.

נתאר חלוקה, שנקרא לה I_n. הרעיון שעומד בבסיסה הוא לכסות בחלק קטן את הנקודות הבעיתיות שהן $\frac{1}{k}$ וכך להבטיח שהסכום העליון לא יהיה גדול מדי.

נבחר $L=\frac{1}{2n^2}$.

החלוקה שלנו היא:

$$I=\{0,\frac{1}{n}-L,\frac{1}{n}+L,\frac{1}{n-1}-L,\frac{1}{n-1}+L,\dots,\frac{1}{2}-L,\frac{1}{2}+L,1-L,1\}$$

נשים לב שפרט ל $0,1$ כל נקודה $\frac{1}{k}$ ($1\le k\le n$) "תורמת" שתי נקודות לחלוקה: $\frac{1}{k}-L,\frac{1}{k}+L$

ראשית נראה שזו באמת חלוקה, כלומר רצוי לוודא ש

$$\frac{1}{k}+L<\frac{1}{k-1}-L$$

וזה שקול ל

$$2L<\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$$

$$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k^2-k}$$

וזה אכן נכון כי $k\le n$.

עכשיו נמצא את הסכומים של החלוקה. די ברור ש

$$\underline{S}(I_n)=0$$

הסכום העליון דורש יותר מחשבה:

הקטעים

$$[\frac{1}{k}-L,\frac{1}{k}+L]$$

תורמים לסכום העליון

$$1 \cdot 2L = \frac{1}{n^2}$$

(סך הכל יש n קטעים כאלה)
הקטעים $[\frac{1}{k}+L, \frac{1}{k-1}-L]$ תורמים 0.
הקטע $[1-L, 1]$ תורם $L = \frac{1}{2n^2}$.
והקטע $[0, \frac{1}{n}+L]$ תורם $\frac{1}{n}+L = \frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}$.
בסך הכל נקבל

$$\overline{S}(I_n) = \frac{n}{n^2} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} = \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$$

שזה שואף ל 0 ולכן יכול להיות מספר קטן כרצוננו.
לכן לכל $\epsilon > 0$ קיים n כך ש

$$|\overline{S}(I_n) - \underline{S}(I_n)| < \epsilon$$

ולכן f אינטגרבילית.
היות והסכום התחתון הוא 0 נקבל שהאינטגרל הוא 0.
.2

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ -x & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

נראה ש f לא אינטגרבילית. נניח בשלילה שהיא אינטגרבילית על $[0,1]$, אז היא צריכה להיות אינטגרבילית גם על $[\frac{1}{2}, 1]$ (לפי משפט שאני מקווה שראיתם בהרצאה - אבל אם לא לא קשה להוכיח אותו)

תהי $I = \{x_0, \dots x_n\}$ חלוקה של הקטע $[\frac{1}{2}, 1]$, אז בכל קטע $[x_{k-1}, x_k]$ יש נקודה רציונאלית, שערך הפונקציה בה גדול שווה ל $\frac{1}{2}$. ונקודה אי רציונאלית, שערך הפונקציה בה קטן שווה מ $-\frac{1}{2}$

ולכן הסכום העליון הוא לפחות $\frac{1}{2}$ והסכום התחתון הוא לכל היותר $-\frac{1}{2}$ ולכן לא ייתכן שהפונקציה אינטגרבילית.