

מבוא לטופולוגיה - תרגיל בית 2 - פתרון

1. (מהרצאה 2) יהי M מרחב מטרי, x_n סדרת איבריו ו- $a \in M$.
הוכיחו ש- $x_n \rightarrow a$ אם"ם לכל סביבה U של a כל אברי הסדרה פרט למספר סופי שלהם מוכלים ב- U .

הוכחה

כיוון 1. נניח $x_n \rightarrow a$. ויהי U סביבה של a אזי לפי הגדרת קבוצה פתוחה (סביבה) קיים כדור פתוח $B(a, \varepsilon)$ כך ש- $B(a, \varepsilon) \subseteq U$. לפי קריטריון ההתכנסות כל אברי הסדרה פרט למספר סופי שלהם מוכלים ב- $B(a, \varepsilon)$. אבל כל איבר הסדרה שנמצא מחוץ ל- U נמצא גם מחוץ ל- $B(a, \varepsilon)$. לכן מחוץ ל- U נמצאים לא יותר ממספר סופי אברי הסדרה מש"ל.

כיוון 2. יהי לכל סביבה U של a כל אברי הסדרה x_n פרט למספר סופי שלהם מוכלים ב- U ויהי $\varepsilon > 0$. נקבע $U = B(a, \varepsilon)$: הרי כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה. מזה נובע ש כל אברי הסדרה x_n פרט למספר סופי שלהם מוכלים ב- $B(a, \varepsilon)$ ולכן לפי קריטריון ההתכנסות $x_n \rightarrow a$, מש"ל.

2. הגדרה. הפונקציה $D: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ כך ש- $D = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, נקראת

פונקציה דיריכלה. ($\mathbb{Q}$ -קבוצת מספרים רציונאליים)

הוכיחו שפונקציה דיריכלה אינה רציפה בכל נקודה.

הוכחה

תהי $a \in \mathbb{R}$. נניח – בשלילה – ש- D רציפה ב- a . לכל $n \in \mathbb{N}$

נגדיר x_n כך ש- $a < x_n < a + \frac{1}{n}$ ו- $x_n \in \begin{cases} \mathbb{Q}, & n \text{ איזוגי} \\ \mathbb{Q}^c, & n \text{ זוגי} \end{cases}$ אם

מההגדרה נובע:

$$|x_n - a| \leq \frac{1}{n} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} |x_n - a| \rightarrow 0 \stackrel{(2)}{\Rightarrow} x_n \rightarrow a$$

פה: (1) ההקורסים הקודמים, (2) קריטריון התכנסות מהרצאה.

אבל לכל n מתקיים: $|D(x_n) - D(x_{n+1})| = 1$ כי בזוג (x_n, x_{n+1}) מספר אחד רציונלי והשני – אירציונלי. אזי הסדרה $D(x_n)$ אינה סדרת קושי ולכן לא מתכנבת. זה סותר לקריטריון רציפות D -ב- a , מש"ל.

3. יהיו A, B מרחבים מטריים. הוכיחו שהפונקציה $f: A \rightarrow B$ רציפה אם ורק אם הקבוצה $f^{-1}(F)$ סגורה לכל קבוצה סגורה $B \supseteq F$. הוכחה.

לפי משפט מהרצאה f רציפה אם"ם $f^{-1}(U)$ פתוחה לכל קבוצה פתוחה $B \supseteq U$.

כיוון 1. נניח f רציפה ו- F סגורה. אזי $(f^{-1}(F^c))^c = f^{-1}(F)$.

אבל F^c פתוחה ולפי המשפט $f^{-1}(F^c)$ פתוחה. לכן לפי השוויון האחרון $f^{-1}(F)$ סגורה, מש"ל.

כיוון 2. נניח הקבוצה $f^{-1}(F)$ סגורה לכל קבוצה סגורה $B \supseteq F$, ויהי U פתוחה. אזי U^c סגורה ולפי ההנחה $f^{-1}(U^c)$ סגורה. אז $(f^{-1}(U))^c = f^{-1}(U^c)$ סגורה ו- $f^{-1}(U)$ פתוחה. אזי לפי המשפט f רציפה, מש"ל.

4. תזכורת. מרחב מטרי נקרא "שלם" אם כל סדרת קושי במרחב הזה מתכנסת.

יהיה M מרחב מטרי שלם ויהי $M \supseteq F$ קבוצה סגורה. הוכיחו שתת מרחב F הוא מרחב מטרי שלם.

הוכחה.

נניח סדרת קושי ב- F . צריך להוכיח שקיימת נקודה $a \in F$ כך ש- $x_n \rightarrow a$.

כל האיברים x_n שייכים ל- F . כיוון שמטריקה ב- F מושרה מ- M , סדרת קושי גם ב- M . אבל M מרחב שלם לפי התנאי. לכן קיימת נקודה $a \in M$ כך ש- $x_n \rightarrow a$. מכיוון ש- F קבוצה סגורה, $a \in F$. לפי הגדרת מרחב מטרי שלם, F שלם,

5. (מהארצאה 2) הוכיחו ש- הקבוצות

$$U_1 = (0,1) - \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots \right\}$$

$$U_2 = (0,1) - \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots \right\}$$

פתוחות ב- $(0,1)$.

הוכחה.

$(0,1)$ –קבוצה פתוחה (כל המרחב).

$$U_1 = (0,1) - \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots \right\} = \left(0, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{7}\right) \cup \dots$$

כל קטע כאן פתוחה ב- $\mathbb{R}$ ולכן פתוחה ב- $(0,1)$ כחיתוך אתו (הרצאה).

אזי U_1 פתוחה כאחוד של קבוצות פתוחות ב- $(0,1)$.

$$U_2 = (0,1) - \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots \right\} = \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right) \cup \dots$$

כל קטע כאן פתוחה ב- $\mathbb{R}$ ולכן פתוחה ב- $(0,1)$ כחיתוך אתו (הרצאה).

אזי U_2 פתוחה כאחוד של קבוצות פתוחות ב- $(0,1)$.