תרגול מס' 13
חישוב אינטגרלים ממשיים בעזרת משפט השארית

<u>הקדמה (ארוכה):</u>

יש כמה סוגי אינטגרלים ממשיים אותם ניתן לחשב תוך שימוש במשפט השארית.

1. <u>אינטגרלים טריגונומטריים</u> -

אינטגרלים מהצורה: $\boxed{\int_0^{2\pi} F(\sin\theta,\cos\theta)\,d\theta}$, כאשר *F* היא פונקציה רציונאלית כלשהי.

במקרה זה, נרצה למצוא פונקציה מרוכבת כלשהי, $f(z)$, כך שאם נחשב את האינטגרל: $\int_{|z|=1} f(z)\,dz$ ע"י הפרמטריזציה: $z=e^{i\theta}, 0\le\theta\le 2\pi$, נקבל:

$$\int_{|z|=1} f(z)\,dz=\int_0^{2\pi} F(\sin\theta,\cos\theta)\,d\theta\ .$$

ולכן ממשפט השארית נסיק כי: $\int_0^{2\pi} F(\sin\theta,\cos\theta)\,d\theta=2\pi i\sum \mathrm{Res}(f,z_n)$ (z_n אלו נקודות הסינגולריות של *f* בתוך מעגל היחידה).

כדי למצוא את *f*, נשתמש בהצבה:

$$z=e^{i\theta}$$
$$\Downarrow$$
$$\cos\theta=\frac{z+z^{-1}}{2},\sin\theta=\frac{z-z^{-1}}{2i},d\theta=\frac{dz}{iz}$$

2. <u>אינטגרלים לא אמיתיים של פונקציה רציונלית</u> –

אינטגרלים מהצורה: $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx}$

<u>הערה:</u>
חשוב לשים לב שהאינטגרל עליו מדברים הוא "הערך העיקרי של האינטגרל" (*PV*) שמוגדר להיות:

$$PV\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M} f(x)\,dx$$

בניגוד להגדרה של חדו"א שבה: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$.

התכנסות של האינטגרל במובן ה"רגיל" מבטיחה התכנסות במובן של "הערך העיקרי" (וערכם זהה).
אך ההפך אינו בהכרח נכון – לדוגמא:
$\int_0^{\infty} x\,dx$ מתבדר ולכן במובן "הרגיל" האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx$ אינו מתכנס (לפי ההגדרה, הוא מתכנס אמ"מ שני חלקיו מתכנסים).

אבל -

$PV\int_{-\infty}^{\infty} xdx = \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} xdx = \lim_{M\to\infty} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-M}^{M} = 0$ - כלומר הערך העיקרי כן מתכנס.

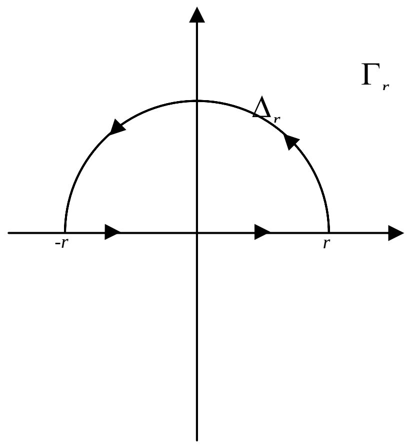
ואם כן, שתי ההגדרות אינן שקולות וחשוב להבין זאת.
(עד כאן ההערה)

בכל מקרה, נחזור לפונקציות רציונליות –
אם P ו-Q הם פולינומים המקיימים:

1. ל-Q אין אפסים ממשיים.
2. $\deg Q \geq \deg P + 2$

אז האינטגרל מתכנס $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ וניתן לחשבו בדרך הבאה:

מסתכלים על המסלול הסגור המורכב מחצי מעגל ברדיוס r סביב הראשית - Δ_r, והקטע $[-r,r]$ נסמן אותו ב- $\Gamma_r = \Delta_r + [-r,r]$:



ומסתכלים על הפונקציה המרוכבת: $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$.

נתון של-Q אין אפסים ממשיים ולכן אין ל-f סינגולריות על הציר הממשי. כמו כן, מספר נקודות הסינגולריות הוא סופי (לכל פולינום יש מספר סופי של אפסים) ולכן ניתן להסיק כי עבור r מספיק גדול, נקבל כי כל נקודות הסינגולריות של f שנמצאות בחצי המישור העליון, נמצאות בפנים של Γ_r.

ולכן: $\lim_{r\to\infty} \int_{\Gamma_r} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k)$, כאשר $z_1,...,z_n$ אלו נקודות הסינגולריות של f בחצי המישור העליון.

כעת אנחנו יודעים כי מתקיים: $\int_{\Gamma_r} f(z)dz = \int_{\Delta_r} f(z)dz + \int_{[-r,r]} f(z)dz$ (*)

ניתן להוכיח (ונעשה זאת בתרגילים) כי עבור פולינומים המקיימים: $\deg Q \geq \deg P + 2$, מתקיים:

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\Delta_r} f(z)dz = 0$$

ולכן, אם נעבור ב-(*) לגבול כש- $r\to\infty$, נקבל:

$$2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left(f,z_k\right)=0+\int_{(-\infty,\infty)}f\left(z\right)dz$$

כלומר: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P\left(x\right)}{Q\left(x\right)}dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left(f,z_k\right)$.

ולסיכום, בשביל לחשב את האינטגרל הממשי כל מה שצריך לעשות הוא לחשב מספר את סכום השאריות של הפונקציה המרוכבת f בקטבים שנמצאים בחצי המישור העליון.

3. __אינטגרלים לא אמיתיים של פונקציה רציונלית מוכפלת בפונקציה טריגונומטרית__ –

אינטגרלים מהצורה: $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P\left(x\right)}{Q\left(x\right)}\cos\alpha x dx,\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P\left(x\right)}{Q\left(x\right)}\sin\alpha x dx,\alpha>0}$

כאשר P ו-Q מקיימים:
1. ל-Q אין אפסים ממשיים.
2. $\deg Q\geq\deg P+1$

אם ננסה להגדיר פונקציה מרוכבת: $f\left(z\right)=\frac{P\left(z\right)}{Q\left(z\right)}\cos\alpha z$ כמו קודם, זה לא ממש יועיל כי הפונקציות הטריגונומטריות __המרוכבות__ אינן חסומות ולכן נתקע בשלב שבו נרצה להוכיח כי $\lim_{r\to\infty}\int_{\Delta_r}f\left(z\right)dz=0$

מה שעושים הוא כדלהלן:

נגדיר את הפונקציה המרוכבת: $f\left(z\right)=e^{i\alpha z}\cdot\frac{P\left(z\right)}{Q\left(z\right)}$.

כעת נשים לב כי עבור x ממשי נקבל: $f\left(x\right)=e^{i\alpha x}\frac{P\left(x\right)}{Q\left(x\right)}=\cos\alpha x\cdot\frac{P\left(x\right)}{Q\left(x\right)}+i\sin\alpha x\cdot\frac{P\left(x\right)}{Q\left(x\right)}$,

ולכן:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P\left(x\right)}{Q\left(x\right)}\cos\alpha x dx=\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x\right)dx,\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P\left(x\right)}{Q\left(x\right)}\sin\alpha x dx=\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x\right)dx$$

את האינטגרל: $\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x\right)dx$ נחשב באותה צורה כמו קודם, ונקבל:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x\right)dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left(f,z_k\right)$$

כאשר $z_1,\dots,z_n$ הם הקטבים של f בחצי המישור העליון.

החלק הקצת בעייתי בהוכחה הוא להוכיח ש- $\lim_{r\to\infty}\int_{\Delta_r}f\left(z\right)dz=0$.

אם $\deg Q\geq\deg P+2$, אז לא תהיה לנו בעיה להוכיח כי $\lim_{r\to\infty}\int_{\Delta_r}f\left(z\right)dz=0$ בטכניקות הרגילות (אי שוויון המשולש וכאלה), אבל אם $\deg Q=\deg P+1$, הן כבר לא יעזרו ונצטרך להשתמש בלמה של ז'ורדן (להלן).

<u>הלמה של ז'ורדן:</u>

נסמן - Δ_r חצי המעגל ברדיוס r סביב הראשית.

תהי f רציפה על Δ_r, כך ש- $\left|f\left(z\right)\right| \le M$ לכל $z \in \Delta_r$.

אם $\alpha > 0$, אז מתקיים: $\left|\int\limits_{\Delta_r} f\left(z\right)e^{i\alpha z}dz\right| \le \frac{M\pi}{\alpha}$

Marie Ennemond Camille Jordan
(1838-1922)

תרגיל מס' 1

חשבו את האינטגרל: $I=\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}$, כאשר: $a>1$.

פתרון

אנחנו רוצים לעבוד עם אינטגרל שגבולות האינטגרציה שלו הם: $0,2\pi$, לכן אם נזכור ש- $\cos\left(2\pi-\theta\right)=\cos\theta$, נקבל:

$$\int_{\pi}^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}=\begin{bmatrix}\varphi=2\pi-\theta\\ d\varphi=-d\theta\end{bmatrix}=\int_{\pi}^{0}\frac{-d\varphi}{a+\cos\left(2\pi-\varphi\right)}=\int_{0}^{\pi}\frac{d\varphi}{a+\cos\varphi}=I$$

ולכן: $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}=\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}=2I \quad\Leftarrow\quad I=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}$.

כעת, נשתמש בהצבה: $z=e^{i\theta},\cos\theta=\frac{z+z^{-1}}{2},d\theta=\frac{dz}{iz}$ ונקבל:

$$I=\frac{1}{2}\int_{|z|=1}\frac{1}{a+\frac{z+z^{-1}}{2}}\cdot\frac{dz}{iz}=\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{2az+z^2+1}=-i\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+2az+1}$$

כעת, אם נסמן: $f\left(z\right)=\frac{1}{z^2+2az+1}$, אז הקטבים של f הם בנקודות בהן המכנה מתאפס, כלומר:

$$z_{1,2}=\frac{-2a\pm\sqrt{4a^2-4}}{2}=-a\pm\sqrt{a^2-1}$$

כעת $a>1$ (ממשי) ולכן שני השרשים הם ממשיים וכן מתקיים:

$$z_1=-a+\sqrt{a^2-1}\Rightarrow\left|z_1\right|<1$$

$$z_2=-a-\sqrt{a^2-1}\Rightarrow\left|z_2\right|>a>1$$

לכן, z_1 נמצאת בתוך המעגל $\left\{z\,|\,|z|=1\right\}$, ו- z_2 מחוץ לו.

ועפ"י משפט השארית נקבל: $I=-i\cdot2\pi i\operatorname{Res}\left(f,z_1\right)=2\pi\operatorname{Res}\left(f,z_1\right)$.

כל מה שנותר הוא לחשב את השארית ב- z_1:

$$\operatorname{Res}\left(f,z_1\right)=\lim_{z\to z_1}\left(z-z_1\right)f\left(z\right)=\lim_{z\to z_1}\frac{1}{z-z_2}=\frac{1}{z_1-z_2}=\frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}$$

ולסיכום נקבל: $\boxed{I=2\pi\cdot\frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}}$

תרגיל מס' 2

חשבו את האינטגרל: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^4+1}dt$

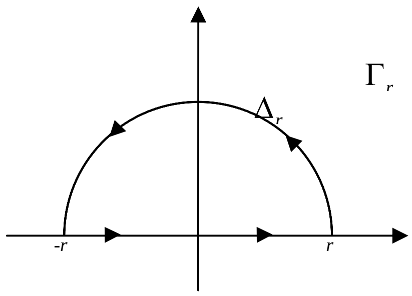
פתרון

נסמן: $f(z)=\frac{1}{z^4+1}$.

נקודות הסינגולריות של f הן בנקודות: $z_k = e^{\frac{\pi+2\pi k}{4}i}, k=0,1,2,3$.
כאשר כל אחת מהן מהווה קוטב פשוט של f .

מבין 3 נקודות אלו, רק הנקודות: $z_0=e^{\frac{\pi}{4}i}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i, z_1=e^{\frac{3\pi}{4}i}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ נמצאות בחצי המישור העליון.

כעת נסתכל על הקונטור הבא:



$$\Gamma_r = \Delta_r + [-r,r]$$

עבור r מספיק גדול, יתקיים ששתי הנקודות z_0, z_1 נמצאות בפנים הקונטור Γ_r, ולכן עפ"י משפט השארית:

$$(*) \int_{\Gamma_r} f(z)dz = 2\pi i\left(\mathrm{Res}(f,z_0)+\mathrm{Res}(f,z_1)\right)$$

כעת נסכל על האינטגרל לאורך Δ_r (חצי המעגל בלבד), ולפי משפט ההערכה נקבל:

$$\left|\int_{\Delta_r} f(z)dz\right| \le \pi r\cdot M$$

כאשר M חסם כלשהו לערך של f על חצי המעגל. נחפש חסם כזה:

$$\left|f(z)\right|_{z\in\Delta_r} = \left|\frac{1}{z^4+1}\right| = \frac{1}{\left|z^4+1\right|} \le \frac{1}{r^4-1}$$

א"ש המשולש - $|a-b| \ge \left||a|-|b|\right|$

ולכן נקבל: $\left|\int_{\Delta_r} f(z)dz\right| \le \pi r\cdot\frac{1}{r^4-1} = \frac{\pi r}{r^4-1} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$

ולכן נסיק כי: $\lim_{r\to\infty}\int_{\Delta_r} f(z)dz = 0$ (**)

כעת, נשים לב כי מתקיים: $\int\limits_{\Gamma_r} f(z)dz = \int\limits_{\Delta_r} f(z)dz + \int\limits_{[-r,r]} f(z)dz$

$$\Downarrow$$

$$\int_{-r}^{r} f(t)dt = \int\limits_{[-r,r]} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma_r} f(z)dz - \int\limits_{\Delta_r} f(z)dz$$

כעת, נשאיף את r בשני אגפי המשוואה לאינסוף ונקבל ע"י שימוש ב-(*), (**):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 2\pi i\left(\text{Res}(f,z_0)+\text{Res}(f,z_1)\right)$$

לסיום נחשב את השאריות הרלוונטיות, בעזרת שאלה מס' 8 מתרגול 13:

$$\text{Res}(f,z_0) = \left.\frac{1}{\left(z^4+1\right)'}\right|_{z=z_0} = \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=z_0} = \frac{1}{4e^{\frac{3\pi i}{4}}} = \frac{e^{-\frac{3\pi}{4}i}}{4}$$

$$\text{Res}(f,z_1) = \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=z_1} = \frac{1}{4e^{\frac{9\pi i}{4}}} = \frac{1}{4e^{\frac{\pi i}{4}}} = \frac{e^{-\frac{\pi}{4}i}}{4}$$

ולסיום נקבל:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 2\pi i\left(\frac{e^{-\frac{\pi}{4}i}}{4}+\frac{e^{-\frac{3\pi}{4}i}}{4}\right) = \frac{\pi i}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}}$$

תרגיל מס' 3

חשבו את האינטגרל: $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos t}{t^2+4}dt$

פתרון

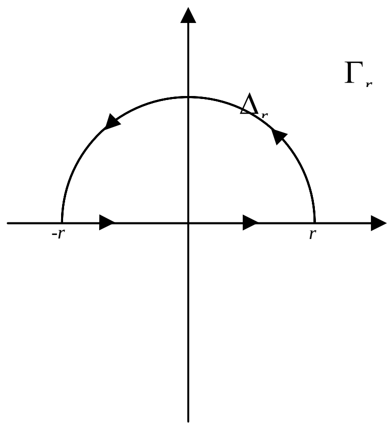
במקרה זה לא יעזור לנו להשתמש בפונקציה המרוכבת: $\frac{\cos z}{z^2+4}$, כיוון שבמקרה המרוכב הפונקציה $\cos z$ אינה חסומה.

לכן, מה שנעשה הוא להשתמש בפונקציה: $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+4}$.

על הישר הממשי מתקיים: $\frac{\cos t}{t^2+4} = \text{Re}\left(\frac{e^{it}}{t^2+4}\right) = \text{Re}\, f(t)$, ולכן נסיק כי:

$$I = \text{Re}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \, .$$

כעת, נפעל באותה השיטה כמו בתרגיל הקודם, נסתכל על הקונטור:



$$\Gamma_r = \Delta_r + [-r, r]$$

עבור r גדול מספיק מתקיים: $\int\limits_{\Gamma_r} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 2i)$

תיכף נוכיח, ש- $\int\limits_{\Delta_r} f(z)\,dz \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$ ולכן נוכל להסיק כי:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 2i) = 2\pi i \left[\frac{e^{iz}}{2z}\right]_{z=2i} = 2\pi i \cdot \frac{e^{-2}}{4i} = \frac{\pi}{2e^2}$$

נוכיח, אם כן כי $\int\limits_{\Delta_r} f(z)\,dz \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$:

$$(*) \left|\int\limits_{\Delta_r} f(z)\,dz\right| \le \pi r \cdot M$$

כאשר M חסם על המודול של f על Δ_r, ננסה לחשב חסם כזה:

נשים לב כי מתקיים: $|e^{iz}| = |e^{-y+ix}| = e^{-y} \le 1$ (כי $y \ge 0$ על Δ_r) ולכן נקבל -

$$|f(z)| = \left|\frac{e^{iz}}{z^2+4}\right| \le \frac{1}{r^2-4}$$

נחזור ל-(*) ונקבל כי: $\left|\int\limits_{\Delta_r} f(z)\,dz\right| \le \pi r \cdot \frac{1}{r^2-4} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$, ואם כן הוכחנו מה שרצינו.

לסיכום קיבלנו כי $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \frac{\pi}{2e^2}$ ולכן נקבל כי: $\boxed{I = \operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt\right) = \frac{\pi}{2e^2}}$.

שימו לב שבאותו התהליך חישבנו גם את האינטגרל: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t^2+4}\,dt = \operatorname{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt\right) = 0$ (שזה גם הגיוני כיוון ש- $\frac{\sin t}{t^2+4}$ היא אי-זוגית).

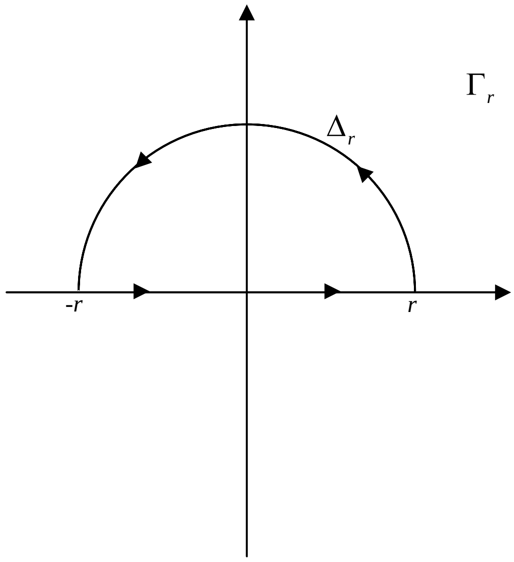
תרגיל מס' 4

חשבו את האינטגרל: $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+9}dx$

פתרון

נגדיר: $f(z)=\frac{ze^{iz}}{z^2+9}$, ונקבל: $I=\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx$.

בדיוק כמו שעשינו בשני התרגילים הקודמים, נגדיר את: Γ_r



נקודת הסינגולריות היחידה של f בחצי המישור העליון היא $z=3i$, ולכן:

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\Gamma_r}f(z)\,dz=2\pi i\operatorname{Res}(f,3i)$$

כעת נוכיח כי $\lim_{r\to\infty}\int_{\Delta_r}f(z)\,dz=0$:

לפי הלמה של ז'ורדן: $\left|\int_{\Delta_r}f(z)\,dz\right|=\left|\int_{\Delta_r}\frac{ze^{iz}}{z^2+9}dz\right|\le\pi\cdot M$, כאשר M הוא חסם לערך $\left|\frac{z}{z^2+9}\right|$ על Δ_r:

אבל על חצי המעגל מתקיים: $\left|\frac{z}{z^2+9}\right|\le\frac{r}{r^2-9}$

ולכן נקבל: $\left|\int_{\Delta_r}f(z)\,dz\right|\le\pi\cdot M\le\frac{\pi r}{r^2-9}\xrightarrow[r\to\infty]{}0$, כלומר: $\lim_{r\to\infty}\int_{\Delta_r}f(z)\,dz=0$.

(שימו לב, שאם היינו מנסים להעריך את האינטגרל כמו שעשינו עד עכשיו, היינו מקבלים:

$\left|\int_{\Delta_r}f(z)\,dz\right|\le M\cdot\pi r$, כאשר M הוא חסם של f על Δ_r -

$$|f(z)|=\left|\frac{ze^{iz}}{z^2+9}\right|\le\frac{r\left|e^{-y+ix}\right|}{r^2-9}=\frac{re^{-y}}{r^2-9}\le\frac{r}{r^2-9}$$

ובסוף היינו מקבלים: $\left|\int_{\Delta_r} f(z)\,dz\right| \le \frac{r}{r^2-9}\cdot \pi r = \frac{\pi r^2}{r^2-9} \xrightarrow[r\to\infty]{} \pi$, כלומר, לא היינו יכולים להוכיח בדרכים הסטנדרטיות ש- $\lim_{r\to\infty}\int_{\Delta_r} f(z)\,dz = 0$ ולכן נעזרנו בלמה של ז'ורדן)

כמו בתהליך שעשינו כבר, מקבלים: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \operatorname{Res}(f,3i)$, ולכן נשאר לנו רק לחשב את השארית.

זהו קוטב פשוט, ולכן עפ"י הנוסחא שראינו בתרגול הקודם:

$$\operatorname{Res}(f,3i) = \left.\frac{ze^{iz}}{\left(z^2+9\right)'}\right|_{z=3i} = \left.\frac{ze^{iz}}{2z}\right|_{z=3i} = \frac{3ie^{-3}}{6i} = \frac{e^{-3}}{2}$$

ולכן: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\frac{e^{-3}}{2} = \pi i e^{-3}$.

לסיום - $I = \operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, ולכן נקבל: $I = \pi e^{-3}$.

תרגיל מס' 5

חשבו את האינטגרל: $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2 x}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx$

פתרון

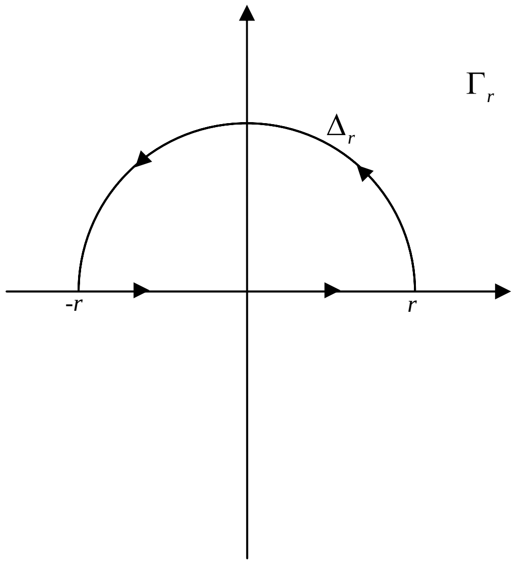
נשתמש בזהות: $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ ונקבל:

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+\cos 2x}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx$$

כעת, אם נגדיר: $f(z) = \frac{1+e^{2iz}}{\left(1+z^2\right)^2}$, אז נקבל:

$$I = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\right)$$

בדיוק כמו שעשינו כבר מיליון פעם, נגדיר את Γ_r :



נקודת הסינגולריות היחידה של f בחצי המישור העליון היא $z=i$, ולכן נקבל:

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\Gamma_r} f(z)\,dz = 2\pi i\operatorname{Res}(f,i)$$

כעת נוכיח כי $\lim_{r\to\infty}\int_{\Delta_r} f(z)\,dz = 0$:

$$(*)\left|\int_{\Delta_r} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{\Delta_r}\frac{1+e^{2iz}}{\left(1+z^2\right)^2}dz\right| \le \left|\int_{\Delta_r}\frac{1}{\left(1+z^2\right)^2}dz\right| + \left|\int_{\Delta_r}\frac{e^{2iz}}{\left(1+z^2\right)^2}dz\right|$$

כמו כן:

$\left|\int_{\Delta_r}\frac{1}{\left(1+z^2\right)^2}dz\right| \le \pi r\cdot M_1$, כאשר M_1 הוא חסם של $\left|\frac{1}{\left(1+z^2\right)^2}\right|$ על Δ_r :

$$\left|\frac{1}{\left(1+z^2\right)^2}\right| = \frac{1}{\left|1+z^2\right|^2} \le \frac{1}{\left|1-r^2\right|^2} = \frac{1}{\left(r^2-1\right)^2}$$

ולכן:

$$\left|\int_{\Delta_r}\frac{1}{\left(1+z^2\right)^2}dz\right| \le \pi r\cdot M_1 \le \frac{\pi r}{\left(r^2-1\right)^2}\xrightarrow[r\to\infty]{} 0$$

כמו כן, לפי הלמה של ז'ורדן, מתקיים: $\left|\int_{\Delta_r}\frac{e^{2iz}}{\left(1+z^2\right)^2}dz\right| \le \frac{M_2\pi}{2}$, כאשר M_2 הוא חסם על $\left|\frac{1}{\left(1+z^2\right)^2}\right|$ על Δ_r. אבל קודם קיבלנו כי: $\left|\frac{1}{\left(1+z^2\right)^2}\right| \le \frac{1}{\left(r^2-1\right)^2}$, ולכן סה"כ נקבל:

$$\left|\int_{\Delta_r}\frac{e^{2iz}}{\left(1+z^2\right)^2}dz\right|\le\frac{M_2\pi}{2}\le\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\left(r^2-1\right)^2}\xrightarrow[r\to\infty]{}0$$

ולסיכום, מ-(*) נקבל את מה שרצינו להוכיח - $\lim_{r\to\infty}\int_{\Delta_r}f\left(z\right)dz=0$.

כעת כל מה שנותר לנו לחשב הוא את השארית של f בנקודה i:
הנקודה $z=i$ היא קוטב מסדר שני של f (למה...???), לכן נשתמש בנוסחא שראינו בתרגול הקודם:

$$\operatorname{Res}\left(f,i\right)=\lim_{z\to i}\left(\left(z-i\right)^2 f\left(z\right)\right)'=\lim_{z\to i}\left(\frac{1+e^{2iz}}{\left(z+i\right)^2}\right)'=$$

$$\lim_{z\to i}\frac{2ie^{2iz}\left(z+i\right)^2-\left(1+e^{2iz}\right)\cdot 2\left(z+i\right)}{\left(z+i\right)^4}=\frac{2ie^{-2}\cdot\left(2i\right)^2-2\left(1+e^{-2}\right)\cdot 2i}{\left(2i\right)^4}=$$

$$=\frac{-8ie^{-2}-4i\left(1+e^{-2}\right)}{16}=\frac{-12ie^{-2}-4i}{16}=-\frac{i}{4}\left(3e^{-2}+1\right)$$

כלומר, קיבלנו כי: $\int_{-\infty}^{\infty}f\left(z\right)dz=2\pi i\cdot\left(-\frac{i}{4}\right)\left(3e^{-2}+1\right)=\frac{\pi}{2}\left(3e^{-2}+1\right)$

אבל $I=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(z\right)dz$, ולכן נקבל לסיום (סוף סוף...) את התוצאה: $I=\frac{\pi}{4}\left(3e^{-2}+1\right)$,
איזה יופי.