

אלגברה לינארית 2 (88-113) - מבחן מועד ב'

מרצים: ד"ר רוני ביתן, ד"ר ארו שיינר
מתרגלים: יונתן סמידוברסקי, אלעד עטיא, אושרית שטוסל, רועי תורג'מן
משך המבחן: 3 שעות
הוראות: יש לענות על כל השאלות, על גבי טופס המבחן במקום המתאים. אפשר לכתוב משני צידי הדף.
 סך הנקודות במבחן הוא 108, ציון מעל 100 יעוגל ל-100.

שאלה 1 (30 נק'): יהי אופרטור $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ עבורו מתקיים

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 \\ a-2 \\ 4a \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a \\ a \\ -2a \end{pmatrix}$$

(א) עבור אילו ערכי $a \in \mathbb{R}$ ההעתקה לכסינה?
 (ב) עבור אילו ערכי $a \in \mathbb{R}$ ההעתקה לכסינה אוניטרית? (מעל המ"פ הסטנדרטית)

שאלה 2 (30 נק'): במרחב הפונקציות הממשיות הרציפות ב $[-1, 1]$ הפונקציה הבאה מגדירה מכפלה פנימית

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) g(x) dx$$

הערה - אין קשר בין הסעיפים.
 (א) מצאו בסיס אורתוגונלי לתת-המרחב הוקטורי $W = \text{span} \{1, x, x^2, x^3\}$.
 (ב) ידוע כי $U = \left\{ g : \int_{-1}^1 g(x) dx = 0 \right\}$ הוא תת-מרחב וקטורי.
 מצאו את ההיטל של $f(x) = x^2$ על תת-המרחב.
רמז הראו כי $\{g(x) = c : c \in \mathbb{R}\} \subseteq U^\perp$ והיעזרו בכך למציאת ההיטל.

שאלה 3 (24 נק'): תהי H מטריצה הרמיטית ($H^* = H$)

(א) הראו כי כל הערכים העצמיים שלה ממשיים.
 (ב) נניח מתקיים $H^k = I$ עבור $k \geq 1$ כלשהו. הראו כי $H^2 = I$.

שאלה 4 (24 נק'): תהיינה M_1, M_2 מטריצות חיוביות והרמיטיות עבורן $M_1 + M_2 = I$.

(א) הראו כי כל הערכים העצמיים של M_1, M_2 הם ב $[0, 1]$.
 (ב) הוכיחו כי לכל w מתקיים $\|M_1 w\| \leq \|w\|$.
 (ג) יהיו u, v מנורמה 1 שעבורם מתקיים $\|u - v\| < \delta$. הראו כי

$$|\langle u, M_1 u \rangle - \langle v, M_1 v \rangle| < 2\delta$$