עבודת הגשה

1. תהי d פסאודו- מטריקה על מרחב X. הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:

   (א) (X,d) הוא מרחב מטרי.

   (ב) כל קבוצה סופית $F \subseteq X$ סגורה ב(x,d).

   (ג) לכל סדרה מתכנסת ב(X,d) יש גבול יחיד.

   (ד) (X,d) הוא האוסדורף.

   (ה) לכל $a \in X$, $\bigcap_{r>0} B(a,r) = \{a\}$.

2. חשבו את השפה של הקבוצות הבאות (תזכורת לכל קבוצה A, $\partial(A) = cl(A) \setminus int(A)$):

   (א) A= אוסף הסדרות המתאפסות לבסוף, במרחב המטרי X של אוסף כל הסדרות שאיבריהן שייכים לקבוצה $\{0,1,2...,n\}$, עם המטריקה הבאה $d : X \times X \to [0,\infty)$ ע"י:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \dfrac{1}{\min\{i : x_i \neq y_i\}} & x \neq y \end{cases}.$$

   (ב) $A = 5\mathbb{Z}$ ב $(\mathbb{Z}, d_3)$.

   (ג) $A = \{f : f(\frac{1}{2}) < 5\}$ ב $C[0,1]$ (מרחב הפונקציות הרציפות $f : [0,1] \to \mathbb{R}$) עם מטריקת המקסימום.

3. יהי (Y,τ) מרחב טופולוגי וX קבוצה כלשהי, ותהי $f : X \to Y$ פונקציה.

   (א) הוכיחו שהאוסף הבא מגדיר טופולוגיה על X:

$$\tau_f = \{f^{-1}(O) : O \in \tau\}.$$

   (ב) הוכיחו שτ_f הוא הטופולוגיה הקטנה ביותר על X עבורה הפו' f רציפה.

4. תרגיל: הוכח/הפרך: תמונה רציפה של T_2 היא T_2 (כלומר, יהיו (X,τ) ו(Y,σ) מרחבים טופולוגיים, כך ש(X,τ) הוא האוסדורף, ונניח שיש פו' רציפה ועל $f : X \to Y$. האם גם (Y,σ) הוא האוסדורף?)

5. הוכיחו: מרחב טופולוגי (X,τ) הוא T_3 אמ"מ הוא T_1 וכן לכל $x\in X$, ולכל קבוצה פתוחה $x\in U\in\tau$ קיימת קבוצה פתוחה V כך ש $x\in V\subseteq\bar{V}\subseteq U$.

6. יהי (X,τ) מרחב ספריבילי ו$U\subseteq X$ תת קובצה פתוחה. הוכיחו שU ביחד עם הטופולוגיה המושרית הוא מרחב ספרבילי.