

1. עוצמות

משפט קנטור

$$\forall X \quad |X| < |P(X)|$$

הוכחה:

- א. תהי קבוצה כלשהי X . נשים לב שמתקיים $X \leq P(X)$ מכיוון שההעתקה $\forall x \in X \quad f(x) = \{x\}$ היא חח"ע. לכן מספיק להראות $|X| \neq |P(X)|$.
- ב. תהי העתקה $f: X \rightarrow P(X)$, נוכיח ש- f אינה על.
- ג. נגדיר $Y = \{x \in X: x \notin f(x)\}$ בהכרח מתקיים ש- $Y \in P(X)$ אינה בטווח של f , מכיוון שאם היה קיים $z \in X$ כך ש- $f(z) = Y$ היינו מקבלים:
$$z \in Y \Leftrightarrow z \in \{x \in X: x \notin f(x)\} \Leftrightarrow z \notin f(z) \Leftrightarrow z \notin Y$$
סתירה $\square$

פונקציה אופיינית

קיימת התאמה חח"ע ועל $P(X) \rightarrow \{0,1\}^X$. לכל קבוצה $A \in P(X)$ נתאים את הפונקציה
$$\forall x \in A \quad 1_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

משפט קנטור ברנשטיין

אם $|A| \leq |B|$ וגם $|B| \leq |A|$ אז $|A| = |B|$.

הוכחה:

- א. מהנתון קיימות $f: A \rightarrow B$ ו- $g: B \rightarrow A$ חח"ע, אם אחת מהן היא על סיימנו, במקרה הכללי נוכיח שקיימת קבוצה $K \subseteq A$ כך ש- $g[B \setminus f(K)] = A \setminus K$. ברגע שנוכיח טענה זו נקבל ש- $A \sim B$ מכיוון שנוכל להגדיר
$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in K \\ g^{-1}(x) & x \in A \setminus K \end{cases}$$
זוהי פונקציה חח"ע ועל.
- ב. מפני ש- $K \subseteq A$ ו- $g[B \setminus f(K)] \subseteq A \setminus K$ נקבל ש- $g[B \setminus f(K)] = A \setminus K$ אם ורק אם
$$K = A \setminus g[B \setminus f(K)]$$
- ג. נגדיר $\varphi: P(A) \rightarrow P(A)$ הפונקציה הבאה: לכל $K \in P(A)$

$$\varphi(K) = A \setminus g[B \setminus f(K)]$$
- ד. טענה: הפונקציה φ מונוטונית עולה כלומר $C \subseteq D \Rightarrow \varphi(C) \subseteq \varphi(D)$.
$$C \subseteq D \Rightarrow f[C] \subseteq f[D] \Rightarrow B \setminus f[D] \subseteq B \setminus f[C] \Rightarrow g[B \setminus f[D]] \subseteq g[B \setminus f[C]] \Rightarrow \varphi(D) \subseteq \varphi(C)$$
א. $C \subseteq D \Rightarrow f[C] \subseteq f[D] \Rightarrow B \setminus f[D] \subseteq B \setminus f[C] \Rightarrow g[B \setminus f[D]] \subseteq g[B \setminus f[C]] \Rightarrow \varphi(D) \subseteq \varphi(C)$

$\Rightarrow A \setminus g$

ה. על פי למת נקודת השבת אם $\varphi: P(A) \rightarrow P(A)$ פונקציה מונוטונית עולה, קיימת $K \subseteq A$ כך ש- $\varphi(K) = K$.

- ו. לכן קיימת $K \subseteq A$ כך ש- $g[B \setminus f(K)] = A \setminus K$ כנדרש. $\square$
- ז. הוכחת למת נקודת השבת:

- a. תהי $f: P(X) \rightarrow P(X)$ פונקציה מונוטונית עולה.
- b. נגדיר $a = \{A \in P(X) | A \subseteq f(A)\}$ ונגדיר $Y := \bigcup_{A \in a} A$.
- c. לכל $A \in a$ מתקיים $A \subseteq f(A)$ לכן $Y = \bigcup_{A \in a} A \subseteq \bigcup_{A \in a} f(A)$.
- d. לכל $A \in a$ מתקיים $A \subseteq Y$ ו- f מונוטונית עולה לכן $f(A) \subseteq f(Y)$ כלומר
$$\bigcup_{A \in a} f(A) \subseteq f(Y)$$
- e. מ- (c) ו- (d) נקבל ש- $Y \subseteq f(Y)$.
- f. נפעיל את f ונקבל $f(Y) \subseteq f(f(Y))$ כלומר $f(Y) \in a$ לכן $f(Y) \subseteq \bigcup_{A \in a} A = Y$.
- g. לכן מ- (f) ו- (e) נקבל $Y = f(Y)$. $\square$

1.1 קבוצות בנות מנייה

1. $\mathbb{Z}$ הינה בת מנייה, נגדיר $h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ באופן הבא $\forall x \in \mathbb{Z} \ h(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -(2x+1) & x < 0 \end{cases}$.
זוהי פונקציה חח"ע ועל.
2. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ הינה בת מנייה, ניתן להגדיר $f(x, y) = \frac{1}{2}(x+y+1)(x+y) + y$.
3. $\mathbb{Q}$ הינה בת מנייה נגדיר $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ על ידי $f(q) = (m, n) \ [q = \frac{m}{n}, \gcd(m, n) = 1]$, $\forall q \in \mathbb{Q}$, זוהי פונקציה חח"ע ולכן $|\mathbb{Q}| \leq \aleph_0$.
מצד שני על ידי העתקת הזהות מראים $\aleph_0 = |\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}|$ ולכן ע"פ CB נקבל $\aleph_0 = |\mathbb{Q}|$.
4. $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ אינה בת מנייה.
 - a. על פי משפט קנטור $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| \leq |\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = |P(\mathbb{N})| < |\mathbb{N}| = \aleph_0$.
 - b. מצד שני $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \subseteq P(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ ולכן $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| \leq |P(\mathbb{N} \times \mathbb{N})| = |P(\mathbb{N})|$.
 - c. לכן על פי קנטור ברנשטיין $\aleph_0 < |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |P(\mathbb{N})|$.
 - d. על פי קנטור ברנשטיין נקבל $|P(\mathbb{N})| = \aleph_0$.
5. משפט: קבוצה היא אינסופית $\Leftrightarrow$ היא שקולה לקבוצה חלקית ממש שלה.
 - a. $\Leftarrow$ תהי X קבוצה אינסופית אזי קיימת תת קבוצה בת מניה של $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ (כל קבוצה בת מניה ניתן להציג כסדרה מכיוון שיש פונקציית שקילות ל- $\mathbb{N}$) נגדיר את הפונקציה $f: X \rightarrow X$ באופן הבא: $f(x) = \begin{cases} x_{n+1}, & x = x_n \\ x, & \forall n \ x \neq x_n \end{cases}$ זוהי העתקה חח"ע מ- X על הקבוצה $X \setminus \{x_1\} \subset X$ כנדרש.
 - b. $\Rightarrow$ אם X שקולה לקבוצה חלקית ממש שלה אז על פי משפט היא בהכרח איננה קבוצה סופית (קבוצה סופית אינה שקולה לשום קבוצה חלקית שלה).
6. מסקנה: העוצמה של קבוצה אינסופית אינה משתנה כתוצאה מהוספה או החסרה של מספר סופי של איברים.
7. משפט: כל קבוצה חלקית לקבוצה בת מניה היא בהכרח סופית או בת מניה.
8. משפט: האיחוד של שתי קבוצות בנות מניה הוא בן מניה הוכחה:
- a. יהיו A, B קבוצות בנות מניה נניח תחילה ש- $A \cap B = \emptyset$. קיימות פונקציות חח"ע ועל מ- $f: A \rightarrow \mathbb{N}_{\text{odd}}$ ו- $g: B \rightarrow \mathbb{N}_{\text{even}}$ נגדיר את $h: A \cup B \rightarrow \mathbb{N}$ באופן הבא: $h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in B \end{cases}$ קל לראות שזוהי פונקציה חח"ע ועל.
- b. אם $A \cap B \neq \emptyset$ אזי נסמן $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$ כאשר $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$.
- c. אם $B \setminus A$ סופית אזי $A \cup (B \setminus A)$ בת מנייה לפי (7) אחרת $(B \setminus A)$ בת מניה ולפי מה שהוכחנו קודם $A \cup (B \setminus A)$ גם כן בת מנייה.
9. משפט: איחוד סופי של קבוצות בנות מניה הינו קבוצה בת מניה (באינדוקציה מהמשפט הקודם).
10. משפט: תהי $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ משפחה בת מניה של קבוצות בנות מניה. אזי האיחוד $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ הינו קבוצה בת מניה. הוכחה:
- a. נניח תחילה כי כל הקבוצות זרות זו לזו, תהי $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$ קבוצת כל המספרים הראשוניים. ולכל $n \in \mathbb{N}$ תהי $A_n = \{p_n, p_n^2, \dots, p_n^n, \dots\}$.
- b. A_n היא קבוצה בת מנייה, הקבוצות A_n זרות בזוגות ו- $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ הינה קבוצה חלקית של $\mathbb{N}$.
- c. לכן $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ היא קבוצה אינסופית החלקית לקבוצה בת מניה ולכן על פי משפט (7) זוהי קבוצה בת מניה.

- d. עתה נשים לב שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $X_n \sim A_n$ (כי אלו שתי קבוצות בנות מניה) ולכן מכך נובע $U_{n=1}^\infty X_n \sim U_{n=1}^\infty A_n$ (כי לכל $n \in \mathbb{N}$ קיימת פונקציה שקילות $(f_n : X_n \rightarrow A_n)$).
- e. אם הקבוצות אינן זרות זו לזו נסמן $Y_n = X_n \setminus (U_{k=1}^{n-1} X_k)$ עבור $n \geq 2$ ו- $Y_1 = X_1$.
- f. מתקיים $U_{n=1}^\infty Y_n = U_{n=1}^\infty X_n$ והקבוצות Y_n זרות זו לזו. לכל n סופית או בת מניה ולכן על פי מה שהוכח לעיל והמשפט הקודם נובע כי $|U_{n=1}^\infty Y_n| = \aleph_0$.
11. משפט: מכפלה קרטזית של קבוצות בת מניה היא קבוצה בת מניה.
הוכחה:
- a. תהייה $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ ו- $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\}$ קבוצות בנות מניה.
b. נגדיר $\forall n \in \mathbb{N} A_n = \{(x_i, y_n) : i \in \mathbb{N}\}$
c. קל לראות ש- $\forall n \in \mathbb{N} |A_n| = \aleph_0$ ו- $X \times Y = U_{n=1}^\infty A_n$
d. לכן על פי משפט (10) $|X \times Y| = \aleph_0$
12. משפט: מכפלה קרטזית באורך סופי של קבוצות בת מניה היא בת מניה (באינדוקציה על פי המשפט הקודם)
13. מסקנה: תהי X קבוצה בת מניה, קבוצת כל הסדרות הסופיות הלא ריקות ב- X היא קבוצה בת מניה.
14. קבוצת המספרים האלגבריים היא בת מניה:
- a. תחילה נראה כי קבוצת כל הפולינומים עם מקדמים שלמים בלבד היא בת מניה.
עבור כל $n \in \mathbb{N}$ הפולינום $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ נקבע באופן יחיד על ידי מקדמיו, לכן יש התאמה בין P_n (קבוצת הפולינומים ממעלה n) לבין $\mathbb{Z}^{n+1}$, ממשפט (12) נובע כי $|\mathbb{Z}^{n+1}| = \aleph_0$ ולכן עבור כל n מתקיים $|P_n| = \aleph_0$.
b. לכן קבוצת כל הפולינומים עם מקדמים שלמים בלבד $U_{n=0}^\infty P_n$ הינה קבוצה בת מניה על פי משפט (10).
c. עתה לכל פולינום ב- $U_{n=0}^\infty P_n$ יש מספר סופי של שורשים, לכן קבוצת המספרים האלגבריים הינה איחוד בן מניה של קבוצות סופיות. איחוד כזה הוא לכל היותר בן מניה. מצד שני כל מספר רציונאלי הינו מספר אלגברי לכן $\mathbb{Q}$ קבוצה חלקית לקבוצת המספרים האלגבריים ועוצמתה הינה לכל הפחות $\aleph_0$. לכן על פי CB קבוצת המספרים האלגבריים הינה בת מניה.

1.2 עוצמת הרצף

1. הקבוצה $[0,1]$ אינה בת מניה:
- a. לכל $x \in [0,1]$ קיים פיתוח עשרוני, אם נסכים שבמידה ול- x שני פיתוחים נבחר תמיד בפיתוח הסופי אזי לכל x ב- $[0,1]$ יש פיתוח עשרוני יחיד.
b. נניח בשלילה שהקבוצה $[0,1]$ בת מניה ולכן לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $x_n = 0.x_{n_1}x_{n_2} \dots x_{n_n} \dots$
c. נראה שקיים מספר $y \in [0,1]$ שאינו במניה (כלומר לא קיים n כך ש- $x_n = y$).
d. נגדיר את הפיתוח העשרוני של y באופן הבא $y_n = \begin{cases} 1, & x_{n_n} \neq 1 \\ 2, & x_{n_n} = 1 \end{cases} \forall n$. קל לראות שהפיתוח העשרוני של y אינו מסתיים בשרשרת אינסופית של המספר 9.
e. ברור כי לכל n $y_n \neq x_{n_n}$ ולכן $y \neq x_n$, לכן y אינו במניה.
2. עוצמת הרצף: $|\mathbb{R}| = |P(\mathbb{N})| = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = \aleph$
הוכחת הטענה:
- a. ידוע ש- $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$ ולכן $P(\mathbb{Q}) \sim P(\mathbb{N})$.
b. נגדיר $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ באופן הבא $f(r) = \{q \in \mathbb{Q} | q < r\}$ זוהי העתקה חח"ע מכיוון שהמספרים הרציונאליים צפופים ב- $\mathbb{R}$. לכן קיבלנו $|P(\mathbb{N})| = |P(\mathbb{Q})| \leq \aleph$.

- c. כיוון שני: נגדיר $f: \{1,2\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ על ידי $f(g) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g(i)}{10^{i+1}}$. $\forall g \in \{1,2\}^{\mathbb{N}}$ מכיוון שלכל i מתקיים ש- $g(i) \neq 0,9$ הפיתוח העשרוני הוא יחיד ולכן f חח"ע. לכן $|P(\mathbb{N})| = |\{1,2\}^{\mathbb{N}}| \leq \aleph$

1.3 חשבון עוצמות

1. חיבור: יהיו a, b עוצמות ו- A, B שתי קבוצות זרות כך ש- $|A| = a$ & $|B| = b$. נגדיר $a + b = |A \cup B|$.
 - a. אם $a_1 \leq b_1$ & $a_2 \leq b_2$ (עוצמות) אזי מתקיים $a_1 + a_2 \leq b_1 + b_2$
 - b. $\forall n \in \mathbb{N} \aleph_0 + n = \aleph_0$
 - c. $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ (נגיד על ידי איחוד של הזוגיים והאי זוגיים)
 - d. $\aleph + \aleph = \aleph$ (נגיד על ידי איחוד של שני קטעים)
 - e. $\aleph + \aleph_0 = \aleph$
2. כפל: יהיו a, b שתי עוצמות המיוצגות על ידי A, B בהתאמה אזי $a * b = |A \times B|$.
 - a. כפל קרדינלים הינה פעולה קומוטטיבית ואסוציאטיבית.
 - b. לכל שלושה קרדינלים $(a + b)c = ac + bc$
 - c. אם $a_1 \leq b_1$ & $a_2 \leq b_2$ אזי $a_1 a_2 \leq b_1 b_2$
 - d. $\aleph_0 * \aleph_0 = \aleph_0$ וגם $\forall n \in \mathbb{N} n \aleph_0 = \aleph_0$. הטענה השנייה נכונה כי $\aleph_0 = 1 * \aleph_0 \leq n \aleph_0 \leq \aleph_0 * \aleph_0 = \aleph_0$
 - e. $\aleph * \aleph = n \aleph = \aleph$ זה נכון כי $\aleph * \aleph = \aleph * \aleph \leq n * \aleph \leq \aleph_0 * \aleph = \aleph$
3. חזקה: יהיו a, b קרדינלים ו- A, B קבוצות מייצגות אזי $a^b = |A^B|$.
 - a. $a^{b+c} = a^b * a^c$
 - b. $(a * b)^c = a^c * b^c$
 - c. $(a^b)^c = a^{bc}$
 - d. אם $a \leq b$ אזי $a^c \leq b^c$ ו- $c^a \leq c^b$
 - e. $\aleph^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$
 - f. באמצעות (e) מראים כי $\aleph = \aleph_0^{\aleph_0} = n^{\aleph_0}$

2. קבוצות סדורות

1. קבוצות איזומורפיות: הקבוצות $(X, \leq_x), (Y, \leq_y)$ תיקראנה איזומורפיות אם קיימת פונקציה חח"ע ועל $f: X \rightarrow Y$ כך ש- $f(a) \leq f(b) \Leftrightarrow a \leq b$.
2. אם $f: X \rightarrow Y$ היא פונקציה שומרת סדר אזי גם $f^{-1}: Y \rightarrow X$ שומרת סדר. (כנ"ל הרכבה).
3. סגמנט התחלתי: תהי $(X, \leq)$ קבוצה סדורה ליניארית. קבוצה חלקית $A \subseteq X$ תיקרא סגמנט התחלתי אם $\forall x, y \in X : x \leq y \text{ \& } y \in A \Rightarrow x \in A$.
4. רישא: קבוצה A תיקרא רישא הנקבעת על ידי $x \in X$ אם $A = \{y: y \in X \text{ \& } y < x\}$ רישא כזו תסומן על ידי $O(x)$.
5. למה: כל סגמנט התחלתי אמיתי S של קבוצה סדורה היטב W הוא מהצורה $O(\xi)$ עבור $\xi \in W$ כלשהו. הוכחה:
 - a. מכיוון ש- S סגמנט התחלתי אמיתי הקבוצה $W \setminus S$ אינה ריקה. נסמן $\xi = \min(W \setminus S)$, אזי מתקיים $S = O(\xi)$.
7. עקרון האינדוקציה הטרנספיניטית: תהי A קס"ה ו- $B \subset A$. אם עבור כל $x \in A$ הקבוצה $B \cap O(x)$ אזי $B = A$. מתקיים:
 - a. מספיק להראות $A \setminus B = \emptyset$

- b. נניח בשלילה שקיים $x \in A \setminus B$ ויהי $x = \min(A \setminus B)$, לכל $y \in A$ s.t. $y < x$, מתקיים ש- $y \notin A \setminus B$, לכן בהכרח $y \in B$.
 c. קיבלנו ש- $O(x) \subset B$ ולכן על פי ההנחה $x \in B$ כלומר $x \notin A \setminus B$, סתירה $\square$
 8. משפט: אם $f: A \rightarrow A$ היא פונקציה מונוטונית עולה ממש ו- A קס"ה אזי $\forall x \in A \ x \leq f(x)$
הוכחה:

- a. נגדיר $B = \{x \in A \mid x \leq f(x)\}$ מספיק להראות $A = B$.
 b. יהי $x \in A$ כך ש- $O(x) \subset B$. על פי עקרון האינדוקציה הטראנספיניטית מספיק להראות כי $x \in B$.
 c. יהי $y \in O(x)$, מתקיים $y \leq f(y)$, בנוסף מתקיים $f(y) < f(x)$ (כי $y < x$). לכן לכל $y \in O(x)$ מתקיים $y < f(x)$.
 d. לכן נקבל ש- $f(x) \in A \setminus O(x)$, מכיון ש- x הוא האיבר הקטן ביותר ב- $A \setminus O(x)$ אנו מסיקים כי $x \leq f(x)$, לכן $x \in B$ כנדרש.
 9. מסקנה: אם A & B קבוצות סדורות היטב איזומורפיות, אזי האיזומורפיזם $f: A \rightarrow B$ הוא יחיד.

הוכחה:

- a. יהי $g: A \rightarrow B$ איזומורפיזם נוסף. נראה כי $f = g$.
 b. הפונקציה $f: A \rightarrow A$ $g^{-1} \circ f$ היא גם כן איזומורפיזם (כלומר עולה ממש) ולכן על פי המשפט הקודם $x \leq g^{-1}(f(x))$. נפעיל את g על שני הצדדים ונקבל $f(x) \leq g(x)$.
 c. באותו אופן מראים כי $f(x) \leq g(x)$ ולכן $f(x) = g(x)$, מאחר ו- x שרירותי מתקיים $\square f = g$.
 10. מסקנה: קבוצה סדורה היטב אינה איזומורפית לאף סגמנט התחלתי אמיתי שלה.
הוכחה: אם נניח בשלילה כי קבוצה A איזומורפית ל- $O(x)$ עבור $x \in A$ ו- $f: A \rightarrow O(x)$ איזומורפיזם, נקבל כי $f(x) \in O(x)$ ולכן $f(x) < x$ בסתירה למשפט (8).
 11. מסקנה: שני סגמנטים התחלתיים שונים של אותה קבוצה אינם איזומורפיים.
 12. משפט: הטריכוטומיה של קבוצות סדורות היטב- יהיו A, B קבוצות סדורות היטב, אזי מתקיימת בדיוק אחת מהטענות הבאות:

- i. $A \approx B$
 ii. $A \approx O(b), b \in B$
 iii. $O(a) \approx B, a \in A$

הוכחה:

- a. נגדיר $Z = \{x \in A: \exists y_x \in B \text{ s.t. } O(x) \approx O(y_x)\}$, נשים לב כי על פי מסקנה (11) אם $x \in Z$ אזי המתאים לו הינו יחיד.
 b. נגדיר $f: Z \rightarrow B$ על ידי $f(x) = y_x$.
 c. נראה ראשית כי Z הינו סגמנט התחלתי של A . נניח כי $x < z$ & $z \in Z$. מאחר ו- $z \in Z$ קיים איזומורפיזם h בין $O(z) \subset A$ ל- $O(f(z)) \subset B$.
 d. הצמצום של h ל- $O(x)$ הינו גם כן איזומורפיזם (נשים לב כי $O(x) \subset O(z)$) שהטווח שלו חייב להיות סגמנט התחלתי אמיתי $S \subset O(f(z))$.
 e. בקס"ה כל סגמנט התחלתי הוא רישא לכן $S = O(y), y \in O(f(z))$ מכיון ש- $y \in B$ ו- $O(x) \approx O(y)$ קיבלנו כי $x \in Z$ לכן סגמנט התחלתי של A .
 f. בנוסף מאותם טיעונים ניתן לראות כי f עולה ממש, מכיון ש- $x < z$ & $z \in Z$ גורר כי $O(x)$ איזומורפי ל- $O(y)$ כאשר $y \in O(f(z))$ לכן $f(x) = y < f(z)$.
 g. באופן סימטרי ניתן להראות כי $f[Z]$ הינו סגמנט התחלתי ב- B .
 (כי $f[Z] = \{y \in B: \exists x \in A \text{ s.t. } O(x) \approx O(y)\}$)
 h. לכן $f: Z \rightarrow f[Z]$ איזומורפיזם (בפרט חח"ע ועל).

- i. עתה נשים לב כי אם $Z = A$ אזי f איזומורפיזם בין A ל- B או לסגמנט התחלתי אמיתי של B . באופן דומה אם $f[Z] = B$ אזי f^{-1} איזומורפיזם בין B ל- A או לרישא של A . לכן מספיק להוכיח כי $Z = A$ or $f[Z] = B$.
- j. נניח בשלילה כי $Z \neq A$ & $f[Z] \neq B$, לכן Z רישא של A ו- $f[Z]$ רישא של B . כלומר $Z = O(x), x \in A$ & $f[Z] = O(y), y \in B$ אבל אז f איזומורפיזם בין $Z = O(x)$ ל- $O(y)$ ולכן $x \in Z = O(x)$, סתירה! $\square$

3. מספרים סודרים

1. הגדרה: נאמר ש- α הינו מספר סודר (אורדינל) אם מתקיימות שלושת התכונות הבאות:
- (A_α) אם $\beta \in \alpha$ אזי $\beta < \alpha$
 - (B_α) אם $\beta, \gamma \in \alpha$ אזי $\beta = \gamma$, $\beta \in \gamma$ או $\gamma \in \beta$
 - (C_α) אם $\emptyset \neq B \subset \alpha$ אזי $\emptyset \neq \gamma \cap B = \emptyset$ $\exists \gamma \in B$ s.t.
2. משפט: אם α אורדינל ו- $\eta \in \alpha$ אזי גם η אורדינל.
הוכחה:
- נניח כי α אורדינל ומתקיים $\eta \in \alpha$ נראה כי מתקיימות $(A_\eta) - (C_\eta)$.
 - נשים לב כי מ- (A_α) נובע כי $\eta < \alpha$. נראה כי מתקיים (C_η) , אם $\emptyset \neq B \subset \eta$ אזי גם $B \subset \alpha$ ולכן (C_α) נובע ישירות מ- (C_α) .
 - באותו אופן אם $\beta, \gamma \in \eta$ אזי גם $\beta, \gamma \in \alpha$ ולכן (B_η) נובע ישירות מ- (B_α) .
 - נראה כי מתקיים (A_η) , נניח כי $\beta \in \eta$ עלינו להראות כי $\beta < \eta$. יהי $\xi \in \beta$ מספיק להראות כי $\xi \in \eta$.
 - לפי (A_α) $\beta < \alpha$ ולכן $\xi \in \alpha$. לכן על פי (B_α) מתקיים $\xi = \eta$ or $\eta \in \xi$. $\xi \in \eta$, נראה כי המקרים $\xi = \eta$ or $\eta \in \xi$ לא ייתכנו.
 - נניח בשלילה כי $\eta \in \xi$, לכן מתקיים $\eta \in \xi \in \beta \in \eta$. נגדיר $B = \{\xi, \beta, \eta\}$, מתקיים $\emptyset \neq B \subset \alpha$ אבל אז לא מתקיים (C_α) עבור B . זאת מכיוון ש- $B \cap \eta = \eta$, $B \cap \beta = \beta$, $B \cap \xi = \xi$ ו- $\eta \in \xi$ לכן לא ייתכן $\eta \in \xi$.
 - באופן דומה נניח $\eta = \xi$, מתקיים $\eta \in \xi \in \beta \in \eta$ ונגדיר $B = \{\beta, \eta\}$, נקבל שוב סתירה ל- (C_α) . $\square$
3. אם α אורדינל אזי יחס ההכלה מסדר היטב את α
4. משפט: עבור כל שני אורדינלים α, β מתקיים $\alpha \approx \beta \Rightarrow \alpha = \beta$
הוכחה:
- יהי $f: \alpha \rightarrow \beta$ איזומורפיזם ונגדיר $Z = \{\gamma \in \alpha: f(\gamma) = \gamma\}$, נראה כי $Z = \alpha$ ונקבל כי f היא הזהות על α ולכן $\alpha = f[\alpha] = \beta$.
 - יהי $\gamma \in \alpha$ כך ש- $O(\gamma) \subset Z$, לכן $f(O(\gamma)) = O(f(\gamma)) = O(\gamma)$ ו- $f(\delta) = \delta$ לכל $\delta < \gamma$.
 - לכן $\gamma = \{\delta: \delta < \gamma\} = \{f(\delta): \delta < \gamma\} = f[\{\delta: \delta < \gamma\}] = f[O(\gamma)] = O(f(\gamma)) = O(\gamma)$ (נשים לב שהמעברים נכונים מכיוון ש- γ אורדינל והיחס $<$ הינו $\in$)
 - לכן $\gamma \in Z$ וע"פ עיקרון האינדוקציה הטרונספיניטית $Z = \alpha$.
5. משפט: עבור כל שני אורדינלים α, β מתקיים $\alpha < \beta$ or $\beta < \alpha$ או $\alpha = \beta$
הוכחה:
- על פי משפט (2.12) (הטריכוטומיה של קס"ה) מתקיים או ש- α איזומורפי ל- β או שאחד האורדינלים איזומורפי לרישא של השני, לכן המשפט נובע מהמשפט הקודם שהוכח (3.4). (כי נניח $\beta \approx O(\alpha')$ אז $\alpha' \in \alpha$ אבל גם $\alpha' = O(\alpha')$ לכן $\beta = \alpha' \in \alpha$).
6. משפט: אם $\mathcal{F}$ משפחה לא ריקה של אורדינלים אזי $\cup \mathcal{F}$ גם הוא אורדינל.
הוכחה:
- עלינו להראות כי $\delta = \cup \mathcal{F}$ מקיים את התנאים $(A_\delta) - (C_\delta)$.

- b. (A_δ) : אם $\beta \in U\mathcal{F}$ אזי קיים $\alpha \in \mathcal{F}$ כך ש- $\beta \in \alpha$ לכן $\beta \subset \alpha \subset U\mathcal{F}$.
- c. (B_δ) : אם $\beta, \gamma \in U\mathcal{F}$ אזי קיימים $\alpha_1, \alpha_2 \in U\mathcal{F}$ כך ש- $\beta \in \alpha_1$ & $\gamma \in \alpha_2$ אבל על פי משפט השוואת הסודרים מתקיים $\alpha_1 \leq \alpha_2$ או $\alpha_2 \leq \alpha_1$ נניח כי $\alpha_1 \leq \alpha_2$ אז מתקיים $\alpha_1 \subseteq \alpha_2$ ולכן $\beta, \gamma \in \alpha_2$ ו- (B_δ) נובע מ- (B_{α_2}) .
- d. (C_δ) : תהי $\emptyset \neq B \subset U\mathcal{F}$ ו- $\alpha \in B$. קיים $\eta \in U\mathcal{F}$ כך ש- $\alpha \in \eta$. לכן α אורדינל. אם $\alpha \cap B = \emptyset$ אזי $\alpha = \gamma$ אחרת על פי (C_α) קיים $\gamma = \min(\alpha \cap B)$ ומתקיים $\gamma \cap B = \emptyset$.
7. משפט: לכל קבוצה סדורה היטב $(W, \leq)$ קיים אורדינל יחיד α כך ש- $\alpha \approx W$. הוכחה:

- a. היחידות נובעת ישירות ממשפט (3.4).
- b. עבור $w \in W$ יהי $O[w] = O(w) \cup \{w\}$ ונגדיר $Z = \{w \in W : \exists \text{ord}(\alpha_w) \text{ s.t. } O[w] \approx \alpha_w\}$.
- c. על פי (3.4) ומסקנה (2.9) (יחידות איזומורפיזם) α_w ו- $f_w: O[w] \rightarrow \alpha_w$ יחידים.
- d. עתה אם $v, w \in Z$ ו- $v \leq w$ אזי $f_w[O[v]]$ הינו אורדינל α בתור סגמנט התחלתי של α_w .
- e. בפרט מתקיים ש- $f_w|_{O[v]}: O[v] \rightarrow \alpha$ איזומורפיזם ולכן $f_w|_{O[v]} = f_v$ (מאותם טיעוני יחידות כמוקדם).
- f. הראינו ש- $f_v \subset f_w \forall v, w \in Z \text{ s.t. } v \leq w$, נוכיח עתה באינדוקציה טרנספיניטית כי $Z = W$.
- g. יהי $O(w) \subset Z$ אזי על פי (e) מתקיים $f_v = \bigcup_{v \in O(w)} f_v$ פונקציה עולה ממש מ- $O[v]$ על $\bigcup_{v \in O(w)} \alpha_v$ אבל $\bigcup_{v \in O(w)} \alpha_v = O(w)$ ועל פי משפט (3.6) $\alpha_v = \alpha \forall v \in O(w)$ אורדינל. לכן $f: O(w) \rightarrow \alpha$ איזומורפיזם.
- h. נרחיב את f לפונקציה $F: O[w] \rightarrow \alpha + 1$ על ידי $F(w) = \alpha$. לכן מהקיום של F נובע $w \in Z$ ולכן $Z = W$.
- i. עתה על פי (e) הפונקציה $f = \bigcup_{w \in W} f_w$ איזומורפיזם בין $W = \bigcup_{w \in W} O[w]$ לאורדינל $\bigcup_{w \in W} \alpha_w$.
8. משפט: אם α, β אורדינלים ו- $f: \alpha \rightarrow \beta$ פונקציה עולה ממש אזי $\alpha \leq \beta$.
9. מסקנה: אם W קס"ה ו- $B \subset W$ אזי $Otp(B) \leq Otp(W)$.

4. חשבון סודרים

1. עוקב: $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\} = \alpha + 1$.
2. סודר גבולי: סודר נקרא גבולי אם הוא שונה מאפס ואינו עוקב של אף סודר.
3. טענה: סודר β הוא גבולי אם ורק אם $\beta = \bigcup_{\gamma < \beta} \gamma$.
4. חיבור: עבור α, β אורדינלים נגדיר את הסכום $\alpha + \beta$ על ידי טיפוס הסדר של $\{0\} \times \alpha \cup (\{1\} \times \beta)$ המסודר על פי $(i, \xi) \leq (j, \zeta) \Leftrightarrow i < j \text{ or } (i = j \ \& \ \xi \leq \zeta)$.
5. הגדרה נוספת לחיבור: נגדיר את הסכום $\alpha \oplus \beta$ באינדוקציה טרנספיניטית $\alpha \oplus 0 = \alpha$ ו- $\alpha \oplus (\beta + 1) = (\alpha \oplus \beta) + 1$ אם β אורדינל גבולי, נגדיר $\alpha \oplus \gamma = \sup(\alpha \oplus \gamma)$ עבור α, β אורדינלים נגדיר מכפלה $\alpha \beta$ על ידי טיפוס הסדר של $\beta \times \alpha$ ע"פ הסדר הלקסיקוגרפי.
6. כפל: עבור α, β אורדינלים נגדיר את המכפלה $\alpha \odot \beta$ באינדוקציה טרנספיניטית $\alpha \odot 1 = \alpha$ ו- $\alpha \odot (\beta + 1) = (\alpha \odot \beta) + \alpha$ ועובר $\alpha \odot \gamma = \bigcup_{\beta < \gamma} \alpha \odot \beta$ עבור α, β, γ אורדינלים כלשהם מתקיים:
8. תכונות של כפל וחיבור: עבור אורדינלים כלשהם α, β, γ מתקיים:
- a. אם $\alpha < \beta$ אזי $\gamma + \alpha < \gamma + \beta$
- b. אם $\alpha \leq \beta$ אזי $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$

- c. אם $\alpha < \beta$ ו- $\gamma > 0$ אזי $\gamma\alpha < \gamma\beta$
d. אם $\alpha \leq \beta$ אזי $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$
e. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
f. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$
g. $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$
9. חזקה: עבור α, β אורדינלים נגדיר את פעולת החזקה באינדוקציה טרנספיניטית: $\alpha^0 = 1$,
 $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \alpha$ ועבור β גבולי $\alpha^\beta = \bigcup_{\gamma < \beta} \alpha^\gamma$.

5. קרדינלים

1. נגדיר את הקרדינל של A להיות
 $|A| = \text{card}(A) = \min \{ \alpha : \alpha \text{ is an ordinal number} \ \& \ A \approx \alpha \}$
2. לכל אורדינל α מתקיים $|\alpha| \leq \alpha$
3. נאמר שאורדינל κ הינו קרדינל אם $|A| = \kappa$ עבור קבוצה A כלשהיא.
4. טענה: עבור אורדינל α התנאים הבאים שקולים:
a. α הינו מספר קרדינלי
b. $|\alpha| = \alpha$
c. $\beta < \alpha$ עבור כל $\beta < |\alpha|$
d. $|\beta| < |\alpha|$ עבור כל $\beta < \alpha$
e. $|\beta| \neq |\alpha|$ עבור כל $\beta < \alpha$
5. טענה: אם $\mathcal{F}$ משפחה של קרדינלים אזי גם $\bigcup \mathcal{F}$ קרדינל.
הוכחה: לפי משפט $\bigcup \mathcal{F}$ אורדינל. יתר על כן אם $\beta < \alpha$ אזי $\beta \in \alpha$ ולכן קיים $\kappa \in \mathcal{F}$ כך ש-
 $\beta \in \kappa$. כלומר $\beta < \kappa$ ומכיון ש- κ קרדינל על פי המשפט הקודם מתקיים $|\beta| \leq |\kappa| < |\alpha|$
(המעבר השני מכיון ש- $\kappa \subseteq \alpha$).
6. משפט: אם κ קרדינל אינסופי אזי $\kappa \otimes \kappa = \kappa$
הוכחה:
a. יהי κ קרדינל אינסופי, נוכיח באינדוקציה טרנספיניטית על $\omega \leq \alpha \leq \kappa$ ש-
 $|\alpha| \otimes |\alpha| = |\alpha|$.
b. יהי אפוא $\omega \leq \lambda \leq \kappa$ כך ש- (a) מתקיים לכל $\omega \leq \alpha < \lambda$, נוכיח ש- (a) מתקיים גם עבור λ .
c. נשים לב שאם קיים $\alpha < \lambda$ כך ש- $|\alpha| = |\lambda|$ אזי מתקיים
 $|\lambda| = |\alpha| \otimes |\alpha| = |\alpha| \otimes |\lambda| = |\lambda| \otimes |\lambda|$, לכן ניתן להניח ש- λ מספר קרדינלי.
d. נשים לב כי על פי הנחת האינדוקציה לכל $\alpha < \lambda$ מתקיים
 $|\alpha \times \alpha| = |\alpha| < |\lambda| = \lambda$
e. נגדיר סדר טוב $\leq$ על $\lambda \times \lambda$ על ידי: $(\alpha, \beta) \leq (\gamma, \delta)$ אם ורק אם
 $\max\{\alpha, \beta\} < \max\{\gamma, \delta\}$ or $\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\gamma, \delta\} \ \& \ (\alpha, \beta) \leq_{lex} (\gamma, \delta)$
f. עתה יהי $\lambda \times \lambda \in \lambda$ ו- $(\gamma, \delta) \in \lambda \times \lambda$ אזי $\varepsilon < \lambda$ אזי $\varepsilon = \max\{\gamma + 1, \delta + 1\}$, אזי $\varepsilon < \lambda$ אורדינל פותח ולכן בפרט אורדינל גבולי).
g. יתר על כן הרישא $O_\leq((\gamma, \delta))$ הינה תת קבוצה של $\varepsilon \times \varepsilon$ מכיון
ש- $(\alpha, \beta) \leq (\gamma, \delta)$ גורר $\max\{\alpha, \beta\} < \varepsilon$.
h. לכן על פי (d) $|\varepsilon| < \lambda$ ולכן $|\varepsilon \times \varepsilon| = |O_\leq((\gamma, \delta))| \leq |Otp(O_\leq((\gamma, \delta)))|$
i. לכן גם $\lambda > Otp(O_\leq((\gamma, \delta)))$ (אחרת $Otp(O_\leq((\gamma, \delta))) \leq \lambda$)
j. מכיון שכל אורדינל $\beta \in Otp(\lambda \times \lambda, \leq)$ הוא מהצורה של $Otp(O_\leq((\gamma, \delta)))$ ניתן
לסכם כי $\lambda \leq Otp(\lambda \times \lambda, \leq)$.
k. לכן $|\lambda| = Otp(\lambda \times \lambda, \leq) \leq Otp(\lambda \times \lambda, \leq) \leq \lambda$.

7. מסקנה מהמשפט: אם λ ו- κ קרדינלים אינסופיים אזי $\kappa \otimes \lambda = \kappa \oplus \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$ הוכחה:

a. נניח בלי הגבלת הכלליות כי $\lambda \leq \kappa$ אזי מתקיים

b. וגם $\kappa \otimes \lambda = |\kappa \times \lambda| \leq |\kappa \times \kappa| = \kappa$

c. קל לראות ש- $\kappa \leq \kappa \oplus \lambda \leq \kappa \otimes \lambda \leq \kappa$ ולכן קיבלנו ש- $\kappa \leq \kappa \oplus \lambda \leq \kappa$.

$$\kappa \oplus \lambda = |\kappa|$$

6. אקסיומת הבחירה ותברותיה

1. ארבעת הניסוחים הבאים לאקסיומת הבחירה שקולים:
 - a. לכל קבוצה $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ של קבוצות לא ריקות, קיימת פונקציה $f: I \rightarrow \bigcup A$ כך ש-
 $\forall \alpha \in I, f(\alpha) \in A_\alpha$.
 - b. לכל קבוצה $X \neq \emptyset$, קיימת פונקציה $f: P(X) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow X$, כך שלכל $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, מתקיים $f(A) \in A$.
 - c. לכל יחס בין X ל- Y , יש תת יחס עם אותו תחום שהוא פונקציה (כלומר חד ערכי).
 - d. לכל קבוצה $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ של קבוצות לא ריקות וזרות בזוגות, קיימת קבוצת בחירה, $S \subseteq \bigcup A_\alpha$ כך שלכל $\alpha \in I$ מתקיים $|S \cap A_\alpha| = 1$.
2. משפט ההגדרה ברקורסיה: תהי Z קבוצה, α אורדינל ו- $\mathcal{F}$ משפחה של כל סדרות ה- ξ ב- Z , עבור $\xi < \alpha$. אזי עבור כל פונקציה $h: \mathcal{F} \rightarrow Z$ קיימת פונקציה אחת ויחידה $f: \alpha \rightarrow Z$ כך ש-
 $f(\xi) = h(f|_\xi)$ לכל $\xi < \alpha$.
3. משפט הסדר הטוב (צרמלו): כל קבוצה לא ריקה X ניתן לסדר בסדר טוב.
הוכחה (AC):
 - a. תהי C פונקציית בחירה על $P(X) \setminus \{\emptyset\}$. נבחר איבר שרירותי $p \notin X$ (נגיד $p = X$) ונגדיר $F: P(X \cup \{p\}) \rightarrow X \cup \{p\}$ באופן הבא:

$$F(Z) = \begin{cases} C(Z) & \text{for } Z \in P(X) \setminus \{\emptyset\} \\ p & \text{otherwise} \end{cases}$$
 - b. תהי $\mathcal{G}$ משפחת אורדינלים ξ כך שקיימת סדרת ξ חח"ע ב- X (כלומר פונקציה חח"ע מ- ξ אל תת קבוצה של X).
 - c. יהי α אורדינל שאינו שייך ל- $\mathcal{G}$, למשל $\alpha = \sup \mathcal{G} + 1$. לפי משפט ההגדרה ברקורסיה קיימת פונקציה $f: \alpha \rightarrow X \cup \{p\}$ כך ש- $f(\xi) = F(X \setminus \{f(\zeta): \zeta < \xi\})$, עבור כל $\xi < \alpha$ (מגדירים $f(0) = F(\emptyset)$).
 - d. נשים לב כי עבור כל $\beta \leq \alpha$ מתקיים שאם $f|_\beta \subset X$ אזי $f|_\beta$ חח"ע.
 - e. זה נכון כי $f(\xi) \in X \setminus \{f(\zeta): \zeta < \xi\}$ עבור כל $\xi < \beta$.
 - f. בפרט מתקיים $f[\alpha] \subset X$ מכיוון שאין סדרת α חח"ע ב- X , לכן הקבוצה $S = \{\beta \leq \alpha: f|_\beta \text{ חח"ע}\}$ אינה ריקה.
 - g. נגדיר $\beta = \min S$ (יש כזה כי זו קבוצת אורדינלים), אזי $f|_\beta$ חח"ע ומסדרת את X בטיפוס הסדר β על ידי $f^{-1}(x) \leq f^{-1}(y) \Leftrightarrow x \leq y$.
4. הלמה של צורן: אם $(P, \leq)$ קבוצה סדורה חלקית כך שלכל שרשרת ב- P קיים חסם מעיל ב- P אזי לקבוצה P יש איבר מקסימאלי.
5. עקרון המקסימאליות של האוסדורף: אם $\mathcal{F}$ משפחה לא ריקה של תתי קבוצות של הקבוצה A כך שלכל שרשרת $S \subset \mathcal{F}$ גם האיחוד $\bigcup S$ שייך ל- $\mathcal{F}$ אזי יש ב- $\mathcal{F}$ איבר מקסימאלי ביחס להכלה.
6. האוסדורף $\Leftarrow$ אקסיומת הבחירה:
 - a. תהי $\mathcal{G}$ משפחה לא ריקה של קבוצות זרות בזוגות. נראה שקיימת קבוצת בחירה S עבור $\mathcal{G}$.

- b. תהי $\mathcal{F}$ משפחת כל הקבוצות $T \cup \mathcal{G}$ כך ש- $|T \cap G| \leq 1$ לכל $G \in \mathcal{G}$. נשים לב ש- $\mathcal{F}$ אינה ריקה (הקבוצה הריקה שייכת לה) ומתקיים שלכל שרשרת $US \in \mathcal{F}$ (צריך להראות כמובן)
- c. לכן קיים איבר מקסימאלי $S \in \mathcal{F}$, נניח בשלילה שזו אינה קבוצת בחירה, כלומר קיימת $G \in \mathcal{G}$ כך ש- $G \cap S = \emptyset$ (כי הרי יש לכל היותר איבר אחד בחיתוך לפי הגדרת $\mathcal{F}$).
- d. לכן קיים $g \in G$ ו- $S \cup \{g\}$ נמצאת ב- $\mathcal{F}$ בסתירה למקסימאליות של S .
7. הוכחה שלכל מרחב וקטורי יש בסיס: נוכיח שאם S_0 היא תת קבוצה בת"ל של מרחב וקטורי V מעל K אזי קיים בסיס B של V שמכיל את S_0 .
- מכיוון שהקבוצה הריקה תמיד בת"ל, ותמיד מוכלת בכל מרחב וקטורי המשפט ינבע מכך.
- a. תהי $\mathcal{F} = \{S \subset V : S_0 \subset S \text{ \& } S \text{ linearly independent in } V\}$, נשים לב שמתקיימים התנאים עבור עקרון המקסימאליות של האוסדורף.
- b. ברור ש- $\mathcal{F}$ אינה ריקה, נראה גם שאם $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ שרשרת אזי $U\mathcal{G} \in \mathcal{F}$.
- c. יהיו אפוא $v_1, \dots, v_n \in U\mathcal{G}$ ו- $k_1, \dots, k_n \in K$ כך ש- $k_1 v_1 + \dots + k_n v_n = 0$.
- d. לכל $i \in \{1, \dots, n\}$ תהי $G_i \in \mathcal{G}$ הקבוצה שמקיימת $v_i \in G_i$. הקבוצה $\{G_1, \dots, G_n\}$ היא תת קבוצה סופית של קבוצה סדורה ליניארית ולכן קיים איבר מקסימאלי G_j .
- e. לכן $v_i \in G_i \subset G_j$ לכל i , כלומר כל הוקטורים $v_1, \dots, v_n$ שייכים לקבוצה הבלתי תלויה ליניארית G_j ולכן בהכרח מתקיים $k_1 = \dots = k_n = 0$ כנדרש. לכן $U\mathcal{G} \in \mathcal{F}$.
- f. יהי B האיבר המקסימאלי ב- $\mathcal{F}$, נראה שזהו בסיס ב- V . זוהי בהכרח קבוצה בת"ל מעצם השייכות ל- $\mathcal{F}$, לכן מספיק להראות ש- B פורשת את V .
- g. נניח בשלילה שקיים $v \in V$ כך ש- $v \neq k_1 v_1 + \dots + k_n v_n$ לכל $v_1, \dots, v_n \in V$ ולכל $k_1, \dots, k_n \in K$, נראה שמכך נובע כי $B \cup \{v\} \in \mathcal{F}$ בסתירה למקסימאליות של B .
- h. עבור כל $v_1, \dots, v_n \in V$ ו- $k_1, \dots, k_n \in K$ כך ש- $k_0 v + k_1 v_1 + \dots + k_n v_n = 0$ ישנן שתי אפשרויות:
- i. $k_0 = 0$ ואז מכיוון שהוקטורים האחרים בת"ל ב- S אזי $k_1 = \dots = k_n = 0$
- ii. $k_0 \neq 0$ ואז $k_0 v = -\left(\frac{k_1}{k_0}\right)v_1 - \dots - \left(\frac{k_n}{k_0}\right)v_n$ בסתירה להנחה שלנו על v .

□

i.