תרגול4

מרחבים קומפקטיים

1. מרחב קומפקטי הוא המקיים כי לכל כיסוי פתוח יש תת כיסוי סופי.

   (א) דוגמא: מרחבים סופיים

2. משפט: ב $\mathbb{R}^n$ עם המטריקה הסטנ' מתקיים כי: X קומפקטי אמ"מ הוא סגור וחסום.

   (א) למשל הקבוצה $[0,1]\cup[5,15]$ קומפק'.

   (ב) במרחב מטרי כללי הטענה לא נכונה, למשל: הטבעיים עם הדסקרטית אזי הטבעיים היא סגורה וחסומה ע"י 1 והיא לא קומפק' כי הכיסוי $\{B(n,0.25)=\{n\}\}$ אין לו תת כיסוי סופי.

3. כל קומפקטי הוא חסום. הוכחה: יהא x שרירותית ונסכל על הכיסוי הפתוח $\{B(x,n)\}_n$ אזי יש לו תת כיסוי סופי והרדיוס המקס n_0יקיים כי $X\subseteq B(x,n_0)$.

4. הגדרה: X חסום כליל אם לכל רדיוס r יש מספר סופי של כדורים $B(x_i,r)$ שמהווים כיסוי ל X.

5. טענה: קומפק' גורר חסום כליל. הוכחה: לכל r נתסתכל על הכיסוי $\{B(x,r)\}_x$ אזי יש לו תת כיסוי סופי $\{B(x_i,r)\}$

6. חסימות כליל היא תורשתית. הוכחה: יהא Y תת מרחב של X. לכל r נתון יש כיסוי ל X סופי של $B(x_i,\frac{r}{2})$. כעת לכל i אם $B(x_i,\frac{r}{2})\cap Y$ אינו ריק אזי נבחר מתוכו y_i ואז

$$B(x_i,\frac{r}{2})\cap Y\subseteq B(y_i,r)\cap Y$$

כי $d(y,x_i)<r/2$ גורר $d(y,y_i)\leq d(y_i,x_i)+d(x_i,y)<r$ ולכן $B(y_i,r)$ כיסוי סופי של Y כי $Y=\cup_i B(x_i,\frac{r}{2})\cap Y\subseteq\cup_i B(y_i,r)\cap Y$.

7. סגור של חסום כליל הוא חסום כליל. הוכחה: תהא A קבוצה ו K הסגור שלה. לכל r מתקיים כי קיימים מספר סופי $B(a_i,r-0.1)$ שמהווה כיסוי של A. טענה $B(a_i,r)$ מהווה כיסוי סופי של הסגור. הוכחה: יהא x בסגור. אם $x\in A$ סיימנו. אחרת קיימים $x_i\in A$ כך ש $x_i\to x$ בפרט קיים x_i כך ש $d(x,x_i)<0.05$ ולכן עבור j המקיים $x_i\in B(a_j,r-0.1)$ מתקיים גם $x\in B(a_j,r)$

מרחבים טופולוגים

1. הגדרה: τ $X,\emptyset\in\tau$ סגורה לאיחוד כלשהוא, חיתוך סופי (אפשר להסתפק בחיתוך של שניים). $O\in\tau$ נקראת פתוחה. וקבוצה תקרא סגורה אם המשלים פתוח.
   (א) דוגמאות: $P(X)$ היא דיסקרטית
   (ב) טרי' $\{X,\emptyset\}$
   (ג) טופולוגיה שמושרית ממטריקה = הקבוצות הפתוחות לפי המטריקה
   (ד) הקו-סופית $\{O:|O^c|<\infty\}\cup\{\emptyset\}$.
   i. תרגיל זוהי טופולוגיה. $X,\emptyset\in\tau$ ברור. איחוד כלשהוא $|(\cup O_i)^c|=|\cap O_i^c|\le$ $|O_1^c|<\infty$. חיתוך של 2: $|(O_1\cap O_2)^c|\le|O_1^c|+|O_2^c|<\infty$
   ii. הערה: אם X סופית אזי הטו' הקו-סופית = הטו' הדיסקרטית.

2.]לדלג[הגדרה: יהא a שלם ו d טבעי אזי נגדיר $S_{a,d}=a+d\mathbb{Z}$. נגדיר על השלמים τ כך: קבוצה O היא פתוחה אמ"מ $O=\cup_{(a,d)}S_{a,d}$.
   (א) תרגיל: זוהי טו'. הוכחה: הקבוצה הריקה= איחוד ריק של סדרות דו"צ. השלמים = $S_{0,1}$. איחוד כלשהוא - ברור. חיתוך של 2 -

$$O_1\cap O_2=\cup_{(a_1,d_1)\in I_1}\cup_{(a_2,d_2)\in I_2}\left(S_{a_1,d_1}\cap S_{a_2,d_2}\right)$$

   נראה כי $S_{a_1,d_1}\cap S_{a_2,d_2}\in\tau$: אם החיתוך ריק סיימנו. אחרת a בחיתוך ואז טענה: $S_{a_1,d_1}\cap S_{a_2,d_2}=S_{a,lcm\{d_1,d_2\}}$: ההכלה $(\supseteq)$ ברורה כי $a+klcm\{d_1,d_2\}=a_i+k_id_i+klcm\{d_1,d_2\}$ בכיוון $(\subseteq)$ יהא

$$x=a_1+k_1d_1=a_2+k_2d_2$$

   לכן $x-a=k_1'd_1=k_2'd_2$ ולכן מתחלק ע"י d_i ולכן ע"י $lcm\{d_i\}$ ולכן $x=a+klcm\{d_i\}$
   (ב) הערה: $S_{a,d}$ פתוחה
   (ג) תרגיל: $S_{a,d}$ סגורה. הוכחה: $S_{a,d}^c=\cup_{i=1}^{d-1}S_{a+i,d}$

3. הגדרה X מטרזיבלי אם τ מושריה ממטריקה.
   (א) דוגמא: הטופולוגיה דיסקטרית מושרית מהטריקה הדיסקרטית.
   (ב) דוגמא $X=\{a,b\}$ ו $\tau=\{X,\emptyset.a\}$ לא מטר' כי במטריקה כל נקודות סדור אבל אצלנו a לא סגור כי b לא פתוח.
   (ג) דוגמא: $X=\mathbb{R}\cup\{p\}$ (עבור $p\notin\mathbb{R}$) ונגדיר $\tau=\{O:\,p\notin O\vee|O^c|\le\aleph_0\}$. לא מטרז'. כי הקבוצה $\mathbb{R}$ פתוחה ולכן המשלים שלה $\{p\}$ סגור. טענה $\{p\}$אינו חיתוך בן מניה של קבוצות פתוחות. הוכחה: אחרת $\{p\}=\cap_{i\in\mathbb{N}}O_i,$ ולכן לכל i $p\in O_i$ ולכן $|O_i^c|\le\aleph_0$. בנוסף אם ניקח משלים נקבל כי $\mathbb{R}=\cup_iO_{i,}^c$ כלומר המשיים הם איחוד בן מניה של בנות מניה. סתירה. לכן X אינו מטר'

4. הגדרה X,τ מ"ט . סדרה $\{x_n\}$ מתכנסת ל x ונסמן $x_n\to x$ אם לכל סביבה U של x קיים n_0 שממנו $x_n\in U$.
   (א) דוגמא $X=\{a,b\}$ ו $\tau=\{X,\emptyset.a\}$ אזי $x_n=a$ לכל n מקיימת $x_n\to a$ וגם $x_n\to b$.

(ב) דוגמא: $X=\mathbb{R}\cup\{p\}$ (עבור $p\notin\mathbb{R}$) ונגדיר $\tau=\{O: p\notin O\vee|O^c|\leq\aleph_0\}$.
הוכיחו כי כל סדרה מתכנסת היא קבוע לבסוף.
פתרון: נניח בשלילה $x_n\to x$ שאינה קבוע לבסוף. נגדיר $O^c=\{x_n\}_n\setminus\{x\}$ אזי O פתוחה כי $O^c\subseteq\{x_n\}$ והיא סביבה של x אבל לכל n אם $x_n\neq x$ אזי $x_n\notin O$.
סתירה.

התכנסות

1. הגדרה X,τ מ״ט . סדרה $\{x_n\}$ מתכנסת ל x ונסמן $x_n\to x$ אם לכל סביבה U של x קיים n_0 שממנו $x_n\in U$.

(א) דוגמא $X=\{a,b\}$ ו $\tau=\{X,\emptyset.a\}$ אזי $x_n=a$ לכל n מקיימת $x_n\to a$ וגם $x_n\to b$.

(ב) דוגמא: $X=\mathbb{R}\cup\{p\}$ (עבור $p\notin\mathbb{R}$) ונגדיר $\tau=\{O: p\notin O\vee|O^c|\leq\aleph_0\}$.
הוכיחו כי כל סדרה מתכנסת היא קבוע לבסוף.
פתרון: נניח בשלילה $x_n\to x$ שאינה קבוע לבסוף. נגדיר $O=\{x_n\}_n\setminus\{x\}$ אזי O פתוחה כי $O^c\subseteq\{x_n\}$ והיא סביבה של x אבל לכל n אם $x_n\neq x$ אזי $x_n\notin O$.
סתירה.

(ג) דוגמא: סדרה קבועה $x_n=a$ מתכנסת ל $x=a$.

רציפות

1. הגדרה: יהיו $(X,\tau),(Y,\tau')$ מ״ט ו $f:X\to Y$. נאמר ש f רציפה ב $x\in X$ אם לכל סביבה פתוחה V של $f(x)$ קיימת סביבה פתוחה U של x כך ש $U\subseteq f^{-1}(V)$.

(א) פונקציה $f:X\to Y$ תקרא רציפה אם היא רציפה בכל $x\in X$. זה שקול לכך לכך ש תמונה הפוכה של פתוחה היא פתוחה .

(ב) למשל : כל פונקציה $f:(X,\mathrm{disc})\to(Y,\tau')$ רציפה. כל פונקציה $f:(X,\tau)\to(Y,\{\emptyset,Y\})$ רציפה.

(ג) למשל $id:(X,\tau)\to(X,\tau)$ רציפה.

(ד) כל פונקציה f רציפה בין מ״מ.

2. תרגיל: תהא $\tau=\{\mathbb{R},\emptyset,\{2\}\}$ טופלוגיה על $\mathbb{R}$. נגדיר $f(x)=2x$, מצאו אלו נקודות f רציפה בהן.
פתרון: לכל $x\neq 1$ הסביבה היחידית של $f(x)$ היא $\mathbb{R}$ והתמונה ההפוכה שלה פתוחה ולכן f רציפה בה. עבור $x=1$ נקבל עוד סביבה $\{2\}$ שהתמונה ההפוכה שלה היא $\{1\}$ שאינה מכילה סביבה פתוח של x.

(א) תרגיל: מצאו τ על $\mathbb{R}$ כך שחיבור של רציפות $f,g:(\mathbb{R},\tau)\to(\mathbb{R}\tau)$ אינה רציפה.
פתרון: $\tau=\{\mathbb{R},\emptyset,\{2\}\}$ ו $f=g=id$ רציפות. אבל החיבור שלהם היא $h(x)=2x$ שאינה רציפה.

3. תרגיל: יהיו $(X,\tau),(Y,\tau')$ מ״ט ו $f:X\to Y$ רציפה אזי היא שמורת על התכנסות.
כלומר יהיו $x_n\to x$ אזי $f(x_n)\to f(x)$
הוכחה: תהא V סביבה פתוחה של $f(x)$ אזי קיימת סביבה פתוחה U של x כך ש $U\subseteq f^{-1}(V)$. עבור U קיים n_0 שהחל ממנו כל $x_n\in U$ ובפרט החל ממנו $f(x_n)\in V$.

(א) ההפך לא נכון. תהא $f:X\to Y$ ששומרת על התכנסות אזי ייתכן ש f לא רציפה.
פתרון: נסתכל על $X=\mathbb{R}\cup\{p\}$ עם $\tau=\{O:\,p\notin O\vee|O^{c}|\leq\aleph_{0}\}$ אזי $Id:(X,\tau)\to(X,\mathrm{disc})$ לא רציפה כי $id^{-1}\left(\{p\}\right)=\{p\}$ אינו פתוח. אבל שומרת על התכנסות כי כל סדרה שמתכנסת היא קבועה לבסוף $x_{n}=a$ ואז גם $f(x_{n})=f(a)$ מתכנסת.