פתרון מטלה עצמית

<u>פתרון שאלה 1</u>

האם הפונקציה $f(x)=\begin{cases}4x-2 & x\le 1\\ 2x^2 & x>1\end{cases}$ רציפה ב-$\mathbb{R}$? האם היא גזירה ב-$\mathbb{R}$?

<u>רציפות</u>

עבור $x<1$ הפונקציה רציפה כפולינום; עבור $x>1$ הפונקציה רציפה כפולינום. נבדוק רציפות בנקודה $x=1$.

האם f מוגדרת ב-$x=1$? כן, ומתקיים $f(1)=2$.

נחשב גבול ב-$x=1$.

מתקיים: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\underset{0\neq\Delta x\approx 0}{st}\left(f(1+\Delta x)\right)$.

בגלל שאנו לא יודעים האם $1+\Delta x$ גדול מאחד או קטן מאחד, יש לפצל למקרים.

א. $\Delta x>0$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\underset{0<\Delta x\approx 0}{st}\left(f(1+\Delta x)\right)=\underset{0<\Delta x\approx 0}{st}\left(2(1+\Delta x)^2\right)=\underset{0<\Delta x\approx 0}{st}\left(2+4\Delta x+2(\Delta x)^2\right)=2$$

ב. $\Delta x<0$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\underset{0>\Delta x\approx 0}{st}\left(f(1+\Delta x)\right)=\underset{0>\Delta x\approx 0}{st}\left(4(1+\Delta x)-2\right)=\underset{0>\Delta x\approx 0}{st}\left(4+4\Delta x-2\right)=2$$

שני הגבולות החד-צדדיים קיימים ושווים, ולכן הגבול $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ קיים.

האם הגבול שווה לערך הפונקציה בנקודה? כן, שהרי $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2=f(1)$.

לכן הפונקציה רציפה ב-$x=1$.

<u>לסיכום</u>: f רציפה ב-$\mathbb{R}$.

<u>גזירות</u>

עבור $x<1, x>1$ הפונקציה גזירה (כפולינום). לכן נבדוק את $x=1$.

מתקיים: $f'(1)=\underset{0\neq\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}\right)$, וגם כאן יש צורך לפצל למקרים.

א. $\Delta x>0$

$$\underset{0<\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{f(1+\Delta x)-2}{\Delta x}\right)=\underset{0<\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{2(1+\Delta x)^2-2}{\Delta x}\right)=...=4$$

ב. $\Delta x<0$

$$\underset{0>\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{f(1+\Delta x)-2}{\Delta x}\right)=\underset{0>\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{(4(1+\Delta x)-2)-2}{\Delta x}\right)=...=4$$

לביטוי $\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$ יש אותו חלק סטנדרטי לכל $0\neq\Delta x\approx 0$, ולכן הנגזרת קיימת

ומתקיים $f'(1)=\underset{0\neq\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}\right)=4$.

מכאן, f גזירה ב-$x=1$.

<u>לסיכום</u>: f גזירה ב-$\mathbb{R}$.

פתרון שאלה 2

לאילו ערכי $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ הפונקציה הבאה גזירה?

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+b & x<1 \\ cx+d & 1\le x<3 \\ (x-4)^2-1 & x\ge 3 \end{cases}.$$

נשים לב שאם הפונקציה גזירה, אז היא בהכרח רציפה.

תחילה נשתמש ב<u>רציפות</u>.

- רציפות בנקודה $x=1$:
  צריך להתקיים: $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)$.
  כלומר: $a+b=c+d=c+d$,
  ומקבלים את המשוואה $a+b-c-d=0$.
- רציפות בנקודה $x=3$:
  צריך להתקיים: $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=f(3)$.
  כלומר: $3c+d=(-1)^2-1=0$,
  ומקבלים את המשוואה $3c+d=0$.

➢ שימו לב לשתי המשוואות שקיבלנו בשלב הזה, כי אנחנו נצטרך להשתמש בהן בשלב הבא.

כעת נשתמש ב<u>גזירות</u>.

- גזירות בנקודה $x=1$:
  נגזור לפי ההגדרה, משני הצדדים.

$$\underset{0>\Delta x\approx0}{st}\left(\frac{f(1+\Delta x)-(c+d)}{\Delta x}\right)=\underset{0>\Delta x\approx0}{st}\left(\frac{a(1+\Delta x)^2+b-c-d}{\Delta x}\right)=$$

$$\underset{0>\Delta x\approx0}{st}\left(\frac{a+2a\Delta x+a(\Delta x)^2+b-c-d}{\Delta x}\right)=\underset{0>\Delta x\approx0}{st}\left(\frac{2a\Delta x+a(\Delta x)^2}{\Delta x}\right)=2a$$

המעבר האחרון התאפשר מכיוון שראינו כבר כי $a+b-c-d=0$.

$$\underset{0<\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{f(1+\Delta x)-(c+d)}{\Delta x}\right)=\underset{0<\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{c(1+\Delta x)+d-c-d}{\Delta x}\right)=c$$

על מנת שהפונקציה תהיה גזירה, נדרוש $2a=c$, ונקבל את המשוואה $2a-c=0$.

- גזירות בנקודה $x=3$:

באופן דומה מקבלים את התנאי $c=-2$.

נציב לאחור את $c=-2$ (במשוואות שקיבלנו) ונקבל את התשובה הסופית:

$a=-1, b=5, c=-2, d=6$.

פתרון שאלה 3

חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{2\cos x-1}$

הגבול אינו קיים. ואמנם: יהי $H\in\mathbb{N}^*\setminus\mathbb{N}$ ונתבונן בשני מספרים אינסופיים חיוביים: $K_1=2\pi H, K_2=2\pi H+\frac{\pi}{2}$. מתקיים $\sin(K_1)=0,\quad \sin(K_2)=1$, ולכן, הגבול אינו קיים.

ב. $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

מתקיים $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{\sin^2 x}}=st\left(e^{\frac{1}{\sin^2\Delta x}}\right)$ עבור $0\neq\Delta x\approx 0$. מכיוון ש- e^t היא פונקציה רציפה, מתקיים: $st\left(e^{\frac{1}{\sin^2\Delta x}}\right)=e^{st\left(\frac{1}{\sin^2\Delta x}\right)}$. כעת, מכיוון ש- $\sin t$ היא פונקציה רציפה, מתקיים: $\Delta x\approx 0\ \Rightarrow\ \sin\Delta x\approx\sin 0=0$. לכן $\sin\Delta x$ הוא אינפי, ולכן $\sin^2\Delta x$ הוא אינפי חיובי. מכאן, $\frac{1}{\sin^2\Delta x}$ הוא אינסופי חיובי, ולכן $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{\sin^2 x}}=\infty$.

ג. $\lim_{x\to 0}\sin x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

הגבול הוא אפס, כי מדובר במכפלה של פונקציה ששואפת לאפס בפונקציה חסומה.

ד. $\lim_{x\to 0}\cos x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

הגבול אינו קיים בגלל שהגבול $\lim_{x\to 0}\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ אינו קיים.

ואמנם: $\lim_{x\to 0^+}\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$ ואילו $\lim_{x\to 0^-}\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\pi}{2}$.

כעת, מכיוון שהגבול $\lim_{x\to 0}\cos x=1$ קיים (ושונה מאפס!) והגבול $\lim_{x\to 0}\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ לא קיים, נקבל שהגבול $\lim_{x\to 0}\cos x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ לא קיים.

ה. $\lim_{x\to 0^+}x^{\sin x}$

זהו גבול מהצורה 0^0, ולכן ניעזר ב-e:

$\lim_{x\to 0^+}x^{\sin x}=\lim_{x\to 0^+}e^{\sin x\ln x}$.

נחשב בנפרד את הגבול של החזקה:

$$\lim_{x\to 0^+}\sin x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\left(\frac{1}{\sin x}\right)}\underset{\text{l'Hopital}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}=$$

$$\lim_{x\to 0^+}-\frac{\sin^2 x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0^+}-\frac{\sin x}{x}\cdot\tan x=-1\cdot 0=0$$

ומכאן: $\lim_{x\to 0^+}x^{\sin x}=\lim_{x\to 0^+}e^{\sin x\ln x}=e^0=1$.

ו. $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}\sin\frac{1}{x}}{x}$

מתקיים: $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}\sin\frac{1}{x}$.

הגורם הראשון הוא מהצורה $\frac{0}{0}$ ולכן נחקור אותו בנפרד:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}\underset{\text{l'Hopital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}}{1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}=\underset{\text{l'Hopital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}}{2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{2x^3}\ldots$$

זה לא מביא אותנו לפתרון, ולכן ננסה לכתוב את הגבול אחרת:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x}}}\underset{\text{l'Hopital}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x}}\cdot-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}=0 .$$

כעת נחזור לגבול המקורי: $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}\sin\frac{1}{x}$.

הפונקציה הראשונה שואפת לאפס (כרגע הוכחנו) והפונקציה השניה היא חסומה.

לכן $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}\sin\frac{1}{x}}{x}=0$.

<u>פתרון שאלה 4</u>

תהי f פונקציה ממשית ויהי $L\in\mathbb{R}$.

א. הוכיחו: $\lim_{x\to 0}f\left(x^3\right)=L$ אם ורק אם $\lim_{x\to 0}f\left(x\right)=L$.

<u>כיוון ראשון</u>: נתון $\lim_{x\to 0}f\left(x^3\right)=L$, כלומר,

(*) לכל $0\neq\varepsilon\approx 0$ מתקיים $st\left(f\left(\varepsilon^3\right)\right)=L$.

צריך להוכיח ש- $\lim_{x\to 0}f\left(x\right)=L$. כלומר, צריך להוכיח שלכל $0\neq\Delta x\approx 0$ מתקיים $st\left(f\left(\Delta x\right)\right)=L$.

יהי $0\neq\Delta x\approx 0$. אזי גם $\sqrt[3]{\Delta x}$ הוא אינפי שונה מאפס, ולכן מקיים את (*). לכן $st\left(f\left(\left(\sqrt[3]{\Delta x}\right)^3\right)\right)=st\left(f\left(\Delta x\right)\right)=L$, כנדרש.

<u>כיוון שני</u>: נתון $\lim_{x\to 0}f\left(x\right)=L$, כלומר:

(**) לכל $0 \neq \Delta x \approx 0$ מתקיים $st\left(f\left(\Delta x\right)\right) = L$.

צריך להוכיח ש- $\lim_{x\to 0} f\left(x^3\right) = L$, כלומר צריך להוכיח שלכל $0 \neq \varepsilon \approx 0$ מתקיים $st\left(f\left(\varepsilon^3\right)\right) = L$.

יהי $0 \neq \varepsilon \approx 0$. אזי גם ε^3 הוא אינפי שונה מאפס, ולכן מקיים את תנאי (**). נציב שם ונקבל: $st\left(f\left(\varepsilon^3\right)\right) = L$, כנדרש.

מש"ל

ב. נתבונן בטענה הבאה:

$\lim_{x\to 0} f\left(x^2\right) = L$ אם ורק אם $\lim_{x\to 0} f\left(x\right) = L$.

האם זו טענה נכונה? אם כן – הוכיחו; אם לא – הביאו דוגמה נגדית.

הטענה אינה נכונה. ניתן להבין זאת מההוכחה של הסעיף הקודם. נסו להבין איפה ההוכחה של א' נכשלת, כאשר מחליפים את x^3 ב- x^2.

כעת ניתן דוגמה נגדית. נתבונן בפונקציה $f\left(x\right) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$. אזי

$f\left(x^2\right) = \frac{x^2}{|x^2|} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$.

לכן $\lim_{x\to 0} f\left(x^2\right) = 1$ אבל הגבול $\lim_{x\to 0} f\left(x\right)$ אינו קיים.

פתרון שאלה 5

סעיף א

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\left(1-e^{x^2}\right)\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

<u>רציפות</u>

- לכל $x\neq 0$ הפונקציה רציפה כהרכבה, הפרש ומכפלה של פונקציות רציפות.
- נבדוק רציפות ב-$x=0$:

$$\lim_{x\to 0}f\left(x\right)=\lim_{x\to 0}\left(1-e^{x^2}\right)\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0=f\left(0\right)$$

[הסבר לגבול: הפונקציה הראשונה שואפת לאפס והפונקציה השניה חסומה. לכן הגבול של מכפלתן הוא אפס.]
קיבלנו שהפונקציה רציפה באפס.

<u>לסיכום</u>: f רציפה ב-$\mathbb{R}$.

<u>גזירות</u>

- לכל $x\neq 0$ מתקיים:

$$f'\left(x\right)=-2xe^{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\left(1-e^{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

ניתן לראות שלכל $x\neq 0$ הפונקציה הנ"ל מוגדרת, ולכן f גזירה לכל $x\neq 0$.
- נבדוק גזירות ב-$x=0$:

$$f'\left(0\right)=\underset{0\neq\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{\left(1-e^{\left(\Delta x\right)^2}\right)\sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)-0}{\Delta x}\right)=\underset{0\neq\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{\left(1-e^{\left(\Delta x\right)^2}\right)}{\Delta x}\cdot\sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)\right)$$

הביטוי $\sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)$ הוא סופי (מדוע?) . הביטוי $\frac{\left(1-e^{\left(\Delta x\right)^2}\right)}{\Delta x}$ הוא מצורה לא מוגדרת (אינפי' חלקי אינפי') ולכן ניעזר בכלל לופיטל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-e^{x^2}\right)}{x}\underset{l'Hopital}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0}\left(-2xe^{x^2}\right)=0.$$

כלומר הביטוי $\frac{\left(1-e^{(\Delta x)^2}\right)}{\Delta x}$ הוא אינפי'.

לכן $f'(0)=0$.

<u>לסיכום:</u> f גזירה ב- $\mathbb{R}$.

<u>סעיף ב</u>

$$f(x)=\begin{cases} x^{\sin x} & x>0 \\ 1 & x=0 \\ \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) & x<0 \end{cases}$$

<u>רציפות</u>

- לכל $x\neq 0$ הפונקציה רציפה כהרכבה של פונקציות רציפות.
- נבדוק רציפות ב- $x=0$:

לפי סעיף ה' של שאלה 3 מתקיים: $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}=1$. נבדוק את הגבול מהצד השני:

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=1$.

קיבלנו שמתקיים: $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$ ולכן $\lim_{x\to 0} f(x)=1=f(0)$ וקיבלנו שהפונקציה רציפה באפס.

<u>לסיכום:</u> f רציפה ב- $\mathbb{R}$.

<u>גזירות</u>

- לכל $x<0$ מתקיים:

$$f'(x)=-\frac{4}{\pi}\cdot\frac{x}{1+x^4}$$

- לכל $x>0$ מתקיים:

$$f'(x)=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$$

ניתן לראות שלכל $x\neq 0$ הפונקציות הנ"ל מוגדרות, ולכן f גזירה לכל $x\neq 0$.

- נבדוק גזירות ב-$x=0$:

עבור $\Delta x>0$ יש לחשב את הביטוי $\underset{0<\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{\Delta x^{\sin\Delta x}-1}{\Delta x}\right)$. ראינו קודם שמתקיים $\Delta x^{\sin\Delta x}\approx 1$ ולכן הביטוי בתוך החלק הסטנדרטי הוא מצורה לא מוגדרת (אינפי' חלקי אינפי').

נעבור לגבול המתאים:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\sin x}-1}{x}\underset{\text{l'Hopital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0^+}x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)=-\infty.$$

לכן $f'(0)$ לא מוגדר, והפונקציה לא גזירה באפס.

<u>לסיכום</u>: f גזירה ב-$\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

<u>סעיף ג</u>

$$f(x)=\begin{cases}x\cdot e^{-\frac{1}{x}}\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x>0\\ \sqrt[3]{x^5+x^4} & x\leq 0\end{cases}$$

<u>רציפות</u>

- לכל $x\neq 0$ הפונקציה רציפה כהרכבה ומכפלה של פונקציות רציפות.
- נבדוק רציפות ב-$x=0$:

מצד אחד: $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}xe^{-\frac{1}{x}}\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$, שכן יש לנו מכפלה פונקציה חסומה בשתי פונקציות ששואפות לאפס.

מצד שני: $\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\sqrt[3]{x^5+x^4}=0$.

קיבלנו שמתקיים: $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=0$ ולכן $\lim_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$ וקיבלנו שהפונקציה רציפה באפס.

<u>לסיכום</u>: f רציפה ב-$\mathbb{R}$.

גזירות

- לכל $x<0$ מתקיים:

$$f'(x)=\frac{5x^4+4x^3}{3\left(x^5+x^4\right)^{\frac{2}{3}}}$$

כאשר $x=-1$ המכנה מתאפס ולכן הנגזרת לא מוגדרת. כלומר f לא גזירה ב-$x=-1$.

- לכל $x>0$ מתקיים:

$$f'(x)=e^{-\frac{1}{x}}\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}-\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right)$$

וקיבלנו שהפונקציה גזירה לכל $x>0$.

- נבדוק גזירות ב-$x=0$:

עבור $\Delta x>0$ יש לחשב את הביטוי $\underset{0<\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{\Delta x e^{-\frac{1}{\Delta x}}\sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)-0}{\Delta x}\right)$.

מתקיים: $\underset{0<\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{\Delta x e^{-\frac{1}{\Delta x}}\sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)-0}{\Delta x}\right)=\underset{0<\Delta x\approx 0}{st}\left(e^{-\frac{1}{\Delta x}}\sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)\right)=0$

[הסבר לחישוב האחרון: בתוך החלק הסטנדרטי יש לנו אינפי' כפול סופי ולכן זה אינפי'.]

עבור $\Delta x<0$ יש לחשב את הביטוי $\underset{0>\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{\left((\Delta x)^5+(\Delta x)^4\right)^{\frac{1}{3}}-0}{\Delta x}\right)$.

מתקיים:

$$\underset{0>\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{\left((\Delta x)^5+(\Delta x)^4\right)^{\frac{1}{3}}-0}{\Delta x}\right)=\underset{0>\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{\Delta x\left((\Delta x)^2+\Delta x\right)^{\frac{1}{3}}}{\Delta x}\right)=\underset{0>\Delta x\approx 0}{st}\left(\left((\Delta x)^2+\Delta x\right)^{\frac{1}{3}}\right)=0$$

לכן קיבלנו שהפונקציה גזירה באפס ומתקיים: $f'(0)=0$.

<u>לסיכום</u>: f גזירה ב-$\mathbb{R}\setminus\{1\}$.