

תרגיל בית 8 - מופשטת

שאלה 1

תהא G חבורה ונתון שקיים $1 \neq g \in G$ כך שמחלקת הצמידות שלו מכילה שני איברים. הוכיחו שקיימת ב- G תת חבורה נורמלית לא טריוויאלית.

שאלה 2

תהא G חבורה כך ש- $|G| = p^k$ עבור p ראשוני. תהא $H \triangleleft G$ כך ש- $|H| = p$. הוכיחו כי $H \subset Z(G)$.

שאלה 3

עבור $H \leq G$ נגדיר את ה-מנרמל (או ה-נורמליזטור) של H ב- G :
$$N(H) := \{g \in G : gH = Hg\}$$

הוכיחו:

(א) $N(H) \leq G$ ו- $H \triangleleft N(H)$ $\Leftrightarrow N(H) = G$

(ב) $H \triangleleft N(H)$

(ג) אם $H \triangleleft K \leq G$ אזי $K \leq N(H)$

(ד) נתבונן ב- S_6 ובקבוצה הבאה: $H = \{\sigma \in S_6 : \sigma(2) = 2, \sigma(4) = 4, \sigma(6) = 6\}$

1. הוכיחו ש- H היא תת-חבורה ושהיא איזומורפית ל- S_3 . האם היא תת חבורה נורמלית?
2. הוכיחו שב- $N(H)$ יש שתי תת-חבורות K, L כך ששתיהן איזומורפיות ל- S_3 ו- $L \cap K = \{id\}$.

שאלה 4

- (א) נניח ש- G היא חבורת מסדר p^k עבור p ראשוני ו- $k \geq 1$, וש- G פועלת על קבוצה עם n איברים כש- p לא מחלק את n . הוכיחו שקיימת לפעולה נקודת שבת משותפת.
- (ב) הוכיחו או הפריכו: בהינתן חבורה G הפועלת על קבוצה X כך ש- $|G| = |X| = 13$, בהכרח קיימת לפעולה נקודת שבת משותפת.

ג) נתונה פעולה $G \times X \rightarrow X$ כאשר $G := D_7$ ו- $|X| = 19$. הוכיחו או הפריכו:
לפעולה זו קיימת נקודת שבת משותפת.

שאלה 5

א) מצא כמה לוחות 3×3 לא שקולים קיימים (עד כדי סימטריות של הריבוע) אם מותר לצבוע ב-2 צבעים.
ב) כמה לוחות 5×5 לא שקולים (לגבי הסיבובים) קיימים אם מותר לצבוע את הלוחות ב-3 צבעים קבועים.

שאלה 6

א. השתמשו במשפט קיילי על מנת להציג את U_9 כתת חבורה של S_6 .
ב. תהי G חבורה אינסופית פשוטה, ותהי H תת חבורה אמיתית של G . הוכיחו ש- $[G:H] = \infty$.

בנוסף – גם את אתם לא מגישים את השאלה הזאת, תעשו אותה! היא בוחנת ומחדדת הבנה של מושגים חשובים רבים. וחופץ מזה היא ממש ממש יפה!

א. הוכיחו שלא ניתן לשכן את חבורת הקוטרניונים Q_8 בתוך S_7 .
ב. הוכיחו שלא קיימת חבורה G כך ש- $Q_8 \cong G/Z(G)$.

כמובן שיש יותר מדרך אחת לגשת לשאלות הללו, אבל אולי כדאי לחשוב קצת על שיכון בהקשר למשפט קיילי, להבין מהי פעולה נאמנה, להיזכר מה איזומורפיזם שומר, ולהרהר מנקודת מבט קצת יותר מתקדמת במבנה תת החבורות של הקוטרניונים (ועל זה דנו בהרחבה בתרגיל הקודם). תהנו!

בהצלחה!