# פתרון לתרגיל בית מספר 2

**<u>תרגיל 1.3</u>**

**ב.** על פי חוק החילוף נקבל $a+c=c+a=c+b=b+c$ והגענו לסעיף א'. באותו האופן לגבי כפל.

**ה.** $a=a\cdot 1=a((a^{-1})(a^{-1})^{-1})=(aa^{-1})(a^{-1})^{-1}=(a^{-1})^{-1}$

(בדוק מדוע השוויון האחרון נכון).

**<u>תרגיל 2.2</u>**

ג. מתקיים $\left(p-a\right)\in\mathbb{Z}_p$ ולפי הגדרת החיבור מתקיים $a\oplus\left(p-a\right)=p\bmod p=0$ .

**<u>תרגיל 2.3</u>**

**ב.** למספר 2 אין הופכי.

**ד.** לא, כי למשל $1+0_F\neq 1$

**<u>תרגיל 4.1</u>**

נוכיח באינדוקציה על $n$ כי לכל $a\in F$ מתקיים- $n\cdot a=\left(n\cdot 1_F\right)\cdot a$.

בסיס האינדוקציה $(n=1)$:

$\left(1\cdot 1_F\right)\cdot a=1_F\cdot a=a=1\cdot a$ (עפ"י הגדרת $1_F$ כאיבר נייטרלי ביחס לכפל בשדה).

נניח נכונות עבור $n=k$ :

$k\cdot a=\left(k\cdot 1_F\right)\cdot a$

צ"ל נכונות עבור $n=k+1$:

יש להוכיח $\left(k+1\right)\cdot a=\left(\left(k+1\right)\cdot 1_F\right)\cdot a$.

$$\left(\left(k+1\right)\cdot 1_F\right)\cdot a=\left(\underbrace{1_F+1_F+1_F+....+1_F}_{k+1}\right)\cdot a=\left(\left(\underbrace{1_F+1_F+1_F+....+1_F}_{k}\right)+1_F\right)\cdot a$$

$$=\left(k\cdot 1_F+1_F\right)\cdot a\underset{(1)}{=}\left(k\cdot 1_F\right)\cdot a+1_F\cdot a\underset{(2)}{=}k\cdot a+a=\underbrace{a+a+....+a}_{k}+a=\underbrace{a+a+....+a}_{k+1}=\left(k+1\right)a$$

והוכחנו את הטענה . שוויון (1) נובע מחוק הפילוג בשדה, שויון (2) נובע מהנחת האינדוקציה ומהגדרת $1_F$ בשדה.

כעת, מכיון שלכל $a\in F$ מתקיים

$n\cdot a=\left(n\cdot 1_F\right)\cdot a$ נקבל שאם $n>0$ מאפיין של $F$ אז $n\cdot a=\left(n\cdot 1_F\right)\cdot a=0_F\cdot a=0_F$.

**<u>תרגיל 4.4 – א'</u>**

יש הוכחה לכך בהרצאה.

## <u>פתרון התרגיל הנוסף</u>

א. צריך להוכיח: $(a,b)\cdot_{\mathbb{C}}((c,d)+_{\mathbb{C}}(e,f))=(a,b)\cdot_{\mathbb{C}}(c,d)+_{\mathbb{C}}(a,b)\cdot_{\mathbb{C}}(e,f)$. ההוכחה היא טכנית לחלוטין ומתבצעת ע"פ הגדרת החיבור והכפל.

ב. נוכיח קיום הפכי ביחס לכפל (יש להוכיח את כל שאר התכונות).
אם $(a,b)\neq(0,0)$ אזי $(a,b)^{-1}=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ איך מוצאים את ההפכי? פשוט רושמים $(a,b)\cdot(c,d)=1_{\mathbb{C}}=(1,0)$ ומקבלים 2 משוואות ב-2 נעלמים (הנעלמים הם $c,d$ שאמורים להיות מבוטאים באמצעות $a,b$). אם נשתמש בהגדרת הכפל ונפתור את המשוואות נקבל $(c,d)=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$. [שימו לב כי אכן מתקיים כי $a^2+b^2\neq 0$ כי $(a,b)\neq(0,0)$].

ג. האיבר המבוקש הוא אחד מן השניים: $(0,1),(0,-1)$. [איך הגענו לזה? אנו יודעים כי $i\in\mathbb{C}$ מקיים את התכונה הדרושה, והוא מתאים לאיבר $(0,1)$. באופן דומה לגבי $-i\in\mathbb{C}$.
הדרך השניה היא מציאת פתרון של המשוואה $(a,b)\cdot_{\mathbb{C}}(a,b)+_{\mathbb{C}}(1,0)=(0,0)$]

ד. היות ומתקיים $(a,1)\cdot(1,a)=(0,0)$ (בדקו!), קיבלנו מחלקי אפס.

ה. התשובה היא 'לא' והיא נובעת משני הסעיפים הקודמים. מסעיף ג' אנו יודעים שיש איבר $x\in\mathbb{C}$ המקיים $x^2+1=0$, $\mathbb{C}$ הוא שדה, ולכן לפי סעיף ד', $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ אינו שדה.