

1 תוכן

1	המבחן.....	1.1
2	הצעת פתרון: דן בן חנוך+עדי מכנס.....	1.2

1.1 המבחן

מבחן מועד ב' – בדידה 88-195 – 09.03.25

צוות הקורס: ארז שיינר, שירה ידעי משך המבחן: שלוש שעות חומר עזר: מחשבון בלבד

הוראות: יש לענות על כל השאלות, על גבי טופס המבחן במקום המתאים, מחברת המיומא לא תסרק ולא תבדק.

1. (32 נק') תהיינה קבוצות A, B, C , הוכיחו או הפריכו כל אחד מן הסעיפים הבאים:

$$A \setminus (B \setminus C) \subseteq A \setminus (B \cup C) \quad \{א\}$$

$$A \setminus (B \setminus C) \supseteq A \setminus (B \cup C) \quad \{ב\}$$

$$\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \quad \{ג\}$$

$$\mathcal{P}(A \setminus B) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\} \quad \{ד\}$$

2. (21 נק') נביט ביחס R על קבוצת הממשיים $\mathbb{R}$ המוגדר על ידי הכלל

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: aRb \leftrightarrow (|a| = |b|)$$

במילים: a מתייחס ל b אם הערכים המוחלטים שלהם שווים.

{א} הוכיחו כי R יחס שקילות.

{ב} לכל ערך $x \in \mathbb{R}$ קבעו והוכיחו אם עוצמת מחלקת השקילות $|[x]_R|$ היא סופית, $\aleph_0$, $\aleph$ או $2^{\aleph}$. אם היא סופית, מצאו אותה.

{ג} קבעו והוכיחו אם עוצמת קבוצת המנה $|\mathbb{R}/R|$ היא סופית, $\aleph_0$, $\aleph$ או $2^{\aleph}$. אם היא סופית, מצאו אותה.

3. (21 נק') נביט ביחס S על קבוצת המבעיים $\mathbb{N}$ המוגדר על ידי הכלל $\forall a, b \in \mathbb{N}: aSb \leftrightarrow$

$$((b = a) \vee b - a > 1)$$

הערה: $0 \in \mathbb{N}$.

{א} הוכיחו כי S יחס סדר חלקי.

{ב} מצאו את קבוצת כל האיברים המינימליים לפי היחס S ב $\mathbb{N}$.

{ג} האם קיים חסם עליון $\sup\{0, 1, 2, 3\}$? אם כן מצאו אותו, אחרת הוכיחו שלא קיים.

4. (18 נק') תהי קבוצה A ותהיינה פונקציות $f, g \in A^A$.

{א} הוכיחו או הפריכו: אם $f \circ g = g \circ f$, אזי f הפיכה.

{ב} הוכיחו או הפריכו: אם f הפיכה, אזי $f \circ g = g \circ f$.

5. (18 נק') קבעו והוכיחו עבור כל אחת מהקבוצות הבאות אם היא מעוצמה סופית, $\aleph_0$, $\aleph$ או $2^{\aleph}$. אם הקבוצה

מעוצמה סופית, מצאו את העוצמה.

$$A = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \text{Im}(f) = \{0,1\}\} \quad \text{א}$$

$$B = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \exists a \in \mathbb{R}: \text{Im}(f) = \{a\}\} \quad \text{ב}$$

את הפתרונות יש לכתוב במקומות המתאימים בדפים הבאים (אפשר לכתוב משני צידי הדף).

1.2 הצעת פתרון: דן בן חנוך+עדי מכנס

הערה: אם אתם מוצאים טעות בבקשה שלחו מייל לכתובת danbenhanoh@gmail.com

1. (32 נק') תהיינה קבוצות A, B, C , הוכיחו או הפריכו כל אחד מן הסעיפים הבאים:

$$A \setminus (B \setminus C) \subseteq A \setminus (B \cup C) \quad \text{א}$$

$$A \setminus (B \setminus C) \supseteq A \setminus (B \cup C) \quad \text{ב}$$

$$\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \quad \text{ג}$$

$$\mathcal{P}(A \setminus B) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\} \quad \text{ד}$$

פתרון:

א) הפרכה:

$$A = \{1,2,3\}, B = \{1,2\}, C = \{1\}$$

אז:

$$B \setminus C = \{2\}, B \cup C = \{1,2\}$$

אז:

$$A \setminus (B \setminus C) = \{1,3\}$$

$$A \setminus (B \cup C) = \{3\}$$

$$\{1,3\} \not\subseteq \{3\} \text{ והרי } \{1,3\} \not\subseteq \{3\}$$

ב) הוכחה:

יהי $x \in A \setminus (B \cup C)$ לכן $x \in A$ ו- $x \notin B \cup C$ (כי נב"ש $x \in B \cup C$ לכן $x \in B$ או $x \in C$)

לכן $x \notin B \setminus C$ (כי נב"ש $x \in B \setminus C$ לכן $x \in B$ ו- $x \notin C$)

ולכן $x \in A \setminus (B \setminus C)$

■

ג) הוכחה:

תהי $X \in \mathcal{P}(A \setminus B)$ לכן $X \subseteq A \setminus B$ ולכן לכל $c \in X$ נכון $c \in A \setminus B$ ולכן $c \in A$ ולכן $X \subseteq A$

לכן $X \subseteq \mathcal{P}(A)$

■

ד) הוכחה:

הכלה זו כיוונית:

הכיוון הראשון טריוויאלי

הכיוון השני:

תהי $X \in \mathcal{P}(A \setminus B) \cap \mathcal{P}(B)$ לכן $X \subseteq A \setminus B$ ו- $X \subseteq B$

נב"ש שיש איברים ב- X ניקח אחד מהם, c

לכן $c \in A \setminus B$ ו- $c \in B$ סתירה

לכן אין איברים ב- X ולכן X קבוצה ריקה

■

2. (21 נק') נביא ביחס R על קבוצת הממשיים $\mathbb{R}$ המוגדר על ידי הכלל

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: aRb \leftrightarrow (|a| = |b|)$$

במילים: a מתייחס ל- b אם הערכים המוחלטים שלהם שווים.

(א) הוכיחו כי R יחס שקילות.

(ב) לכל ערך $x \in \mathbb{R}$ קבעו והוכיחו אם עוצמת מחלקת השקילות $|[x]_R|$ היא סופית, $\aleph_0$, $\aleph$ או $2^{\aleph}$. אם היא סופית, מצאו אותה.

(ג) קבעו והוכיחו אם עוצמת קבוצת המנה $|\mathbb{R}/R|$ היא סופית, $\aleph_0$, $\aleph$ או $2^{\aleph}$. אם היא סופית, מצאו אותה.

פתרון:

(א)

רפלקסיביות:

יהי $a \in \mathbb{R}$ לכן $|a| = |a|$ ולכן aRa

סימטריות:

יהי $(a, b) \in R$ לכן $|a| = |b|$ ולכן $|b| = |a|$ ולכן $(b, a) \in R$

טרנזיטיביות:

יהיו $(a, b), (b, c) \in R$ לכן מתקיים כי $|a| = |b| = |c|$ ולכן aRc

(ב) נחלק למקרים:

$x = 0$:

מחלקת השקילות היא כל ה- a כך ש- $|a| = 0$ ולכן $a = 0$ ולכן העוצמה היא 1

$x \neq 0$:

מחלקת השקילות היא כל ה- a כך ש- $|a| = |x|$ ולכן $a = \pm x$ וכיוון ש- x שונה מס 0 קיימים 2- x ים כאלו ולכן העוצמה היא 2

(ג) נבנה פונקציה חח"ע ועל מקבוצת המנה ל- $[0, \infty)$ על ידי: $f([x]_R) = |x|$

(א) היא שלמה כי לכל מחלקת שקילות של x קיים בה איבר לדוגמא x

(ב) היא חד ערכית כי המחלקת שקילות של איבר זה רק הערך מוחלט שלו ומינוס הערך מוחלט שלו ולשתיהם יש אותו ערך מוחלט

(ג) היא חח"ע כי אם $x = y$ אזי $[x]_R = [y]_R$

(ד) היא על כי לכל איבר קיימת מחלקת שקילות שהוא נמצא בה שהיא $[[x]]$

ולכן $|\mathbb{R}/R| = \aleph$

3. (21 נק') נביט ביחס S על קבוצת המבניים $\mathbb{N}$ המוגדר על ידי הכלל $\forall a, b \in \mathbb{N}: aSb \leftrightarrow$

$$((b = a) \vee b - a > 1)$$

הערה: $0 \in \mathbb{N}$.

א) הוכיחו כי S יחס סדר חלקי.

ב) מצאו את קבוצת כל האיברים המינימליים לפי היחס S ב $\mathbb{N}$.

ג) האם קיים חסם עליון $\sup\{0,1,2,3\}$? אם כן מצאו אותו, אחרת הוכיחו שלא קיים.

פתרון:

(א)

רפלקסיביות:

יהי $a \in \mathbb{R}$ לכן $a = a$ לכן aSa

אנטי-סימטריות:

נב"ש שקיימים $a \neq b \in \mathbb{N}$ כך $aSb \wedge bSa$
 $b - a > 1 \wedge a - b > 1 \leftrightarrow b - a > 1 \wedge b - a < -1$ זו סתירה

טרנזיטיביות:

יהיו $(a, b), (b, c) \in S$ נחלק למקרים:

אם $a = b$

מהנתון bSc ולכן aSc כנדרש

אם $b = c$

מהנתון aSb ולכן aSc כנדרש

אחרת:

ידוע כי

$$\text{ולכן } \begin{cases} b - a > 1 \\ c - b > 1 \end{cases} \text{ ולכן } c - a > 2 > 1 \text{ כנדרש}$$

(ב)

בשביל שאיבר יהיה מינימלי צריך שלכל $a \neq b$ bRa ולכן:

$$a - b \leq 1 \Leftrightarrow a \leq b + 1 \text{ ולכן:}$$

נשים לב שכדי לצמצם הכי הרבה את הקבוצה ניקח $b = 0$ ולכן $a \leq 1$ ולכן $a = 0, 1$

(ג)

נראה שלא קיים:

נביט בקבוצת חסמי המלעיל:

כל x כך ש:

אם $x = 0$

הוא לא חסם מלעיל כי $0 - 1 \ngtr 1$ ו $0 \neq 1$

אם $x = 1$

הוא לא חסם מלעיל כי $1 - 2 \ngtr 1$ ו $1 \neq 2$

אם $x = 2$

הוא לא חסם מלעיל כי $2 - 3 \ngtr 1$ ו $2 \neq 3$

אם $x = 3$

הוא לא חסם מלעיל כי $3 - 2 \ngtr 1$ ו $3 \neq 2$

אחרת:

צריך ש $x - 0 > 1, x - 1 > 1, x - 2 > 1, x - 3 > 1$

כלומר ש $x > 4$ ולכן $x \geq 5$

וכעת:

אם $x = 5$ אז $5 \nmid 6$ כי $6 - 5 \nmid 1$ ו $6 \neq 5$

אם $x > 5$ אז $5 \nmid x$ כי $5 - x < 0 \nmid 1$

ולכן אין חסם עליון

4. (18 נק') תהי קבוצה A ותהיינה פונקציות $f, g \in A^A$.

(א) הוכיחו או הפריכו: אם $f \circ g = g \circ f$, אזי f הפיכה.

(ב) הוכיחו או הפריכו: אם f הפיכה, אזי $f \circ g = g \circ f$.

פתרון:

(א) הפרכה

נבחר את $A = \mathbb{R}$ ואת הפונקציות הבאות:

הפונקציה הקבועה $0: f(x) = 0$ ו $g(x) = f(x) = 0$

כעת, ברור שהקבועה f אינה הפיכה, אבל לכל מספר ממשי מתקיים כי:

$$f \circ g = f \circ f = g \circ f$$

(ב) הפרכה

נבחר שוב את $A = \mathbb{R}$ ואת הפונקציות הבאות: $f = x^3$ (שהיא כמוכן הפיכה) וכן $g = \sin(x)$.

אבל ברור כי $(\sin(x))^3 \neq (\sin(x^3))$

5. (18 נק') קבעו והוכיחו עבור כל אחת מהקבוצות הבאות אם היא מעוצמה סופית, $\aleph_0$, $\aleph$ או $2^{\aleph}$. אם

הקבוצה מעוצמה סופית, מצאו את העוצמה.

(א) $A = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \text{Im}(f) = \{0,1\}\}$

(ב) $B = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \exists a \in \mathbb{R}: \text{Im}(f) = \{a\}\}$

פתרון:

(א) טענה: $|A| = 2^{\aleph}$

הוכחה:

נשים לב שאלו בעצם הפונקציות העל $\mathbb{R}$ ל $\{0,1\}$

נבנים בפונקציות הלא על: (נסמנה ב' A')

ישנן רק 2 פונקציות כאלה $f_0(x) := 0, f_1(x) := 1$ וכיוון שהאיחוד זר:

$2^{\aleph} = |\{0,1\}^{\mathbb{R}}| = |A| + |A'| = |A| + 2$ ולכן A אינסופית כי נניח בשלילה שהיא סופית לכן הסכום סופי סתירה.

לכן A אינסופית ולכן $|A| + 2 = |A|$ ולכן $|A| = 2^{\aleph}$

(ב) זה בעצם כל הפונקציות הקבועות מ $\mathbb{R}$ ל $\mathbb{R}$! ולכן עוצמתה $\aleph$ כי נבנה פונקציה חח"ע ועל מ $\mathbb{R}$

לקבוצה הזו על ידי $f(y) = h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall y$

כלומר לכל מספר יוצרים פונקציה קבועה של המספר הזה והיא חחע ועל(קל לראות)