

תרגול השלמה בנושא רקורסיה

7 בינואר 2021

תרגילים:

1. ראינו באחד התרגולים, תרגיל: לכמה תחומים מחלקים n ישרים את המישור, כך שכל שני ישרים נחתכים בנקודה אחת, ואין שלושה שנחתכים באותה נק'. התשובה הייתה: הנוסחה:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ \forall n \geq 1 : f(n) = f(n-1) + n \end{cases}$$

אנחנו רוצים כעת למצוא תשובה מפורשת.

פתרון: נבחן את הצעדים הראשונים:

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = f(0) + 1 (= 1 + 1 = 2)$$

$$f(2) = f(1) + 2 = f(0) + 1 + 2$$

$$f(3) = f(2) + 3 = f(0) + 1 + 2 + 3$$

אם כך, ננחש שהפתרון הוא:

$$f(n) = f(0) + \sum_{i=1}^n i = 1 + \frac{(1+n)n}{2}$$

נוכיח זאת באינדוקציה, שמתקיים:

$$f(n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

בסיס: עבור $n = 0$ אכן מתקיים

$$1 = 1 + \frac{0(0+1)}{2}$$

נניח נכונות עד n , ונוכיח עבור $n+1$: נשתמש כאן תחילה בנוסחא הרקורסיבית:

$$\begin{aligned} f(n+1) &= f(n) + n + 1 = 1 + \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \\ &= 1 + \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = 1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

2. כמה מספרים באורך n בספרות 1, 2, 3, 4 יש, שלא מופיעים הרצפים 13, 33?
פתרון: נסמן את כמות המספרים הללו ב- $f(n)$. נבדוק תחילה כמה מספרים כאלה יש המסתיימים בספרה 1? יש $f(n-1)$ כאלה, כי כל מספר "כשר" עם $n-1$ ספרות ניתן להוסיף לו את הספרה 1, והוא יישאר כשר. ולכן יש $f(n-1)$ מספרים המסתיימים ב-2, וכנ"ל ב-4. בסה"כ קיבלנו $3f(n-1)$ מספרים המסתיימים באחת הספרות 1, 2, 4.
כמה מספרים מסתיימים ב-3? כל מספר "כשר" באורך $n-2$, ניתן להוסיף לו 23, 43, ולקבל מספר כשר באורך n המסתיים ב-3. ולכן יש $2f(n-2)$ מספרים המסתיימים ב-3. בסה"כ קיבלנו:

$$f(n) = 3f(n-1) + 2f(n-2)$$

מהם תנאי ההתחלה? באורך 1 - כל ספרה כשרה ולכן יש 4 כאלה. באורך 2? ניקח את כל האופציות, למעט שתי הפסולות: $4^2 - 2 = 14$.
כדי להגיע לנוסחא מפורשת, נשתמש באלגוריתם. הפולינום האופייני הוא $x^2 - 3x - 2$. נמצא את השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

ולכן נקבל:

$$f(n) = \alpha x_1^n + \beta x_2^n$$

את α, β מוצאים בעזרת תנאי התחלה.

3. כמה תתי קבוצות יש ל- $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ שאף אחת לא מכילה שני מספרים עוקבים?
פתרון: שוב, נסמן ב- $f(n)$ את התשובה עבור $[n]$, ונבחן את תתי הקבוצות, ונשים לב

שניתן לחלק אותן לשני סוגים:

סוג א: תתי קבוצות "כשרות" שהאיבר n לא שייך אליהן. כמה כאלה יש? כל תת קבוצה של $[n-1]$ כשרה, היא כשרה ש- n לא שייך אליה, ולכן יש $f(n-1)$ כאלה. סוג ב: תתי קבוצות "כשרות" שהאיבר n כן שייך אליהן. אם n כן שייך, אז $n-1$ לא שייך, כי הן כשרות ואין בהן שני מספרים עוקבים. זה בעצם כל תתי הקבוצות של $[n-2]$, כאשר הוספנו להן את n . ולכן יש $f(n-2)$ כאלה. מה קיבלנו? סוג של פיבונאצ'י:

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$$

מהם תנאי ההתחלה? כמה תתי קבוצות יש ל- $\{1\}$ ללא מספרים עוקבים? 2: $\emptyset, \{1\}$. כמה תתי קבוצות כשרות יש ל- $\{1, 2\}$? 3: $\emptyset, \{1\}, \{2\}$. כלומר בסה"כ:

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f(2) = 3 \\ f(n) = f(n-1) + f(n-2) \end{cases}$$