

תרגיל בית 3 - טופולוגיה

שאלה 1

יהי (X, d) מ"מ.

- א. הוכיחו כי לכל $x \in X$, תת קבוצה סגורה של X .
- ב. הסיקו כי כל תת קבוצה סופית של X סגורה.

שאלה 2

- א. הוכיחו ש- Q אינה סגורה ואינה פתוחה ב- R .
- ב. הוכיחו שהקבוצה $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sin(x) + xy \leq 5\}$ סגורה ב- \mathbb{R}^2 .
- ג. הוכיחו: כל מישור ב- \mathbb{R}^3 הוא סגור.
- ד. יהי $M_n(\mathbb{R})$ המרחב המטרי של המטריצות הריבועיות $n \times n$ עם מקדמים ממשיים (זהו המרחב המטרי $\mathbb{R}^{n \times n}$ עם המטריקה האוקלידית). הוכיחו שקבוצת המטריצות ההפיכות $GL_n(\mathbb{R})$ פתוחה במרחב זה.

שאלה 3

- א. הוכיחו/הפריכו: מטריקות שקולות מגדירות את אותה משפחה של קבוצות סגורות.
- ב. אילו מהמטריקות הבאות שקולות מעל \mathbb{R} : d_Δ (המטריקה הדיסקרטית), d_7 (המטריקה ה-7 אדית), d_5 (המטריקה ה-5 אדית) והמטריקה הסטנדרטית d המוגדרת ע"י $d(x, y) = |x - y|$ (הוכיחו את תשובתכם!).
- ג. נגדיר שתי מטריקות על \mathbb{R}^2 . עבור $x = (x_1, y_1)$, $y = (x_2, y_2)$
- $$d_2(x, y) = \begin{cases} |y_1 - y_2| & x_1 = x_2 \\ |y_1| + |y_2| + |x_1 - x_2| & x_1 \neq x_2 \end{cases}, d_1(x, y) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$
- הוכיחו או הפריכו: שתי המטריקות הן שקולות.

ד. תהי $S = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \right\}$ נגדיר על קבוצה זו שתי מטריקות:

$$\rho((a_n), (b_n)) = \sup\{|a_n - b_n| : n \in \mathbb{N}\}, d((a_n), (b_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|$$

או הפריכו: שתי המטריקות הן שקולות.

שאלה 4

א. יהיו d_1, d_2 מטריקות שקולות מעל X . יהיו ρ_1, ρ_2 מטריקות שקולות מעל Y .

נניח ש- $f : (X, d_1) \rightarrow (Y, \rho_1)$ רציפה. הוכיחו או הפריכו: הפונקציה

$$f : (X, d_2) \rightarrow (Y, \rho_2)$$

ב. יהיו d_1, d_2 מטריקות כלשהן מעל X . יהיו ρ_1, ρ_2 מטריקות כלשהן מעל Y . נניח

ש- $f : (X, d_1) \rightarrow (Y, \rho_1)$ רציפה. הוכיחו או הפריכו: הפונקציה

$$f : (X, d_2) \rightarrow (Y, \rho_2)$$

שאלה 5

תהי $f : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ פונקציה בין שני מרחבים מטריים.

א. הוכיחו: f רציפה אמ"מ $f^{-1}(O)$ פתוחה ב- X לכל כדור פתוח $O \subseteq Y$.

ב. הראו שהטענה האנלוגית עבור כדורים סגורים אינה נכונה. כלומר, מצאו שני מרחבים מטריים ופונקציה ביניהם $f : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$, כך ש- f אינה רציפה

למרות שכן מתקיים התנאי הבא: $f^{-1}(B)$ סגורה ב- X לכל כדור סגור

$$B \subseteq Y$$

שאלה 6

נתבונן במרחב $C[0,1]$: מרחב כל הפונקציות הרציפות $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ עם מטריקת המקסימום.

א. תהי $a \in [0,1]$. נגדיר פונקציה $F_a : C[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ על-ידי $F_a(f) = f(a)$. הוכיחו

כי זו פונקציה רציפה.

ב. הוכיחו/הפריכו: הקבוצה $\left\{ f \in C[0,1] : f\left(\frac{1}{3}\right) < 19 \right\}$ היא קבוצה פתוחה ב-
 $C[0,1]$.

בהצלחה!