מבחן בקורס **חשבון אינפיניטסימלי 1** (89-132)
פתרון מועד ב (23.03.2017)

<u>שאלה 1</u> (15 נקודות)

הוכיחו את המשפט הבא:

משפט Rolle:

תהי f פונקציה ממשית הרציפה על הקטע הסגור $[a,b]$ וגזירה על הקטע הפתוח (a,b).
אם $f(a)=f(b)=0$ אזי קיימת לפחות נקודה אחת $c\in(a,b)$ כך ש-$f'(c)=0$.

<u>הוכחה</u>

לפי הנתון f רציפה על $[a,b]$ ולכן לפי משפט וויירשטראס היא מקבלת מינימום ומקסימום בקטע זה. נסמן את הערך המקסימלי ב-M ואת הערך המינימלי ב-m. מכיוון ש-$f(a)=f(b)=0$ מתקיים: $M\geq 0\ \wedge\ m\leq 0$.

נפצל למקרים:

1. $M=0\ \wedge\ m=0$:
במקרה זה f היא פונקציית האפס ($\forall x\in[a,b]: f(x)=0$) ולכן לכל $c\in[a,b]$ מתקיים $f'(c)=0$.
2. $M>0$:
נסמן ב-x_1 את הנקודה בה מתקבל המקסימום, כלומר $f(x_1)=M$. לפי משפט הנקודה הקריטית ידוע שמתקיים אחד מהבאים:
   א. x_1 היא נקודת קצה:
   מקרה זה לא ייתכן, שכן נתון כי f מתאפסת בקצוות ואילו אצלנו מתקיים $f(x_1)=M>0$. לכן x_1 היא נקודה פנימית.
   ב. $f'(x_1)$ אינו מוגדר:
   לא ייתכן, שכן לפי הנחת המשפט הפונקציה גזירה לכל נקודה פנימית $x\in(a,b)$.

ג. $f'(x_1)=0$:

מכיוון ששני התנאים הקודמים אינם מתקיימים, נובע שאכן $f'(x_1)=0$. לכן נבחר $c=x_1$ ונקבל הדרוש.

3. $m<0$:

מראים (באותו אופן כמו במקרה השני) שהנקודה הרצויה היא הנקודה בה מתקבל המינימום.

שאלה 2

א. (7 נקודות) תהי $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ סדרה הנתונה באמצעות כלל הנסיגה הבא:

$$a_1=2,\quad a_{n+1}=\sqrt{5a_n-4}.$$

הוכיחו ש-$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ מתכנסת, וחשבו את גבולה.

פתרון

תחילה ננחש את הגבול. נסמן $\lim_{n\to\infty}a_n=L$. לכן:

$$L=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{5a_n-4}=\sqrt{5L-4}.$$

מהמשוואה $L=\sqrt{5L-4}$ מקבלים $L=1 \;\vee\; L=4$.

איברי הסדרה הם: $a_1=2,\ a_2=\sqrt{6}=2.44...,\ a_3=2.87...$. כלומר, כל האיברים הם גדולים מ-2, ולכן ננחש שהגבול הוא 4.

כעת, על מנת להראות שהסדרה אכן מתכנסת לגבול הנ"ל, נוכיח שהיא חסומה ומונוטונית עולה.

<u>הסדרה עולה:</u>

נוכיח שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $a_{n+1}\ge a_n$, באינדוקציה על $n\in\mathbb{N}$.

עבור $n=1$ מתקיים $\sqrt{6}>2$ ולכן $a_2\ge a_1$.

נניח נכונות עבור n: $a_{n+1} \ge a_n$.

נוכיח נכונות עבור $n+1$: $a_{n+2} \ge a_{n+1}$.

ואכן מתקיים: $a_{n+2} = \sqrt{5a_{n+1} - 4} \ge \sqrt{5a_n - 4} = a_{n+1}$.

<u>הסדרה חסומה:</u>

נוכיח שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $2 \le a_n \le 4$, באינדוקציה על $n \in \mathbb{N}$.

עבור $n = 1$ מתקיים $2 \le 2 \le 4$ ולכן $2 \le a_1 \le 4$.

נניח נכונות עבור n: $2 \le a_n \le 4$.

נוכיח נכונות עבור $n+1$: $2 \le a_{n+1} \le 4$.

ואכן, מצד אחד: $a_{n+1} = \sqrt{5a_n - 4} \le \sqrt{5 \cdot 4 - 4} = \sqrt{16} = 4$, ומצד שני:

$2 < \sqrt{6} = \sqrt{5 \cdot 2 - 4} \le \sqrt{5a_n - 4} = a_{n+1}$.

לסיכום, הסדרה חסומה ומונוטונית ולכן מתכנסת, וגבולה הוא 4.

ב. (5 נקודות) חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \ldots + \frac{1}{n^2+n}\right)$.

<u>פתרון</u>

ניעזר במשפט הסנדוויץ': לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$n \cdot \frac{1}{n^2+n} \le \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \ldots + \frac{1}{n^2+n} \le n \cdot \frac{1}{n^2+1}.$$

כלומר:

$$\frac{n}{n^2+n} \le \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \ldots + \frac{1}{n^2+n} \le \frac{n}{n^2+1}.$$

קל לראות שמתקיים $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1} = 0$, ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \ldots + \frac{1}{n^2+n}\right) = 0.$$

<u>שאלה 3</u>

א. (5 נקודות) חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(4x+x^2\right)-4x}{x^2}$.

<u>פתרון</u>

מכיוון שזהו גבול מהצורה $\frac{0}{0}$ ניעזר בכלל להופיטל (פעמיים):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(4x+x^2\right)-4x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(4+2x\right)\cos\left(4x+x^2\right)-4}{2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos\left(4x+x^2\right)-\left(4+2x\right)\sin\left(4x+x^2\right)\cdot\left(4+2x\right)}{2}=1 .$$

ב. (20 נקודות) נתבונן בפונקציה

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(x^2-4\right)}{x-2} & x<2\\ ax+b & 2\le x\le 5\\ \sqrt{4+\dfrac{1}{\left(\ln\left(x-5\right)\right)^2}} & 5<x\end{cases} .$$

1. עבור אילו ערכי $a,b\in\mathbb{R}$ הפונקציה הנ"ל רציפה בקטע הפתוח $\left(0,6\right)$?

<u>פתרון</u>

תחילה נשים לב כי באינטרוולים $\left(0,2\right),\left(2,5\right),\left(5,6\right)$ הפונקציה רציפה כמנה/הרכבה של פונקציות רציפות.

נותר לבדוק רציפות בנקודות $x=2,\ x=5$.

<u>רציפות בנקודה</u> $x=2$:

מתקיים:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{\sin\left(x^2-4\right)}{x-2}=\underset{0>\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{\sin\left(\left(2+\Delta x\right)^2-4\right)}{2+\Delta x-2}\right)=st\left(\frac{\sin\left(\Delta x\left(4+\Delta x\right)\right)}{\Delta x}\right)$$

$$=st\left(\frac{\sin\left(\Delta x\left(4+\Delta x\right)\right)\left(4+\Delta x\right)}{\Delta x\left(4+\Delta x\right)}\right)=st\left(\frac{\sin\left(\Delta x\left(4+\Delta x\right)\right)}{\Delta x\left(4+\Delta x\right)}\cdot\left(4+\Delta x\right)\right)=1\cdot 4=4$$

$$\lim_{x\to 2^+}\left(ax+b\right)=2a+b$$

על מנת שהגבול ב-2 יהיה קיים, חייב להתקיים $2a+b=4$.

<u>רציפות בנקודה</u> $x=5$:

$$\lim_{x\to 5^-}\left(ax+b\right)=5a+b$$

מתקיים:

$$\lim_{x\to 5^+}=\underset{0>\Delta x\approx 0}{st}\left(\sqrt{4+\frac{1}{\left(\ln\left(5+\Delta x-5\right)\right)^2}}\right)=st\left(\sqrt{4+\frac{1}{\left(\ln\left(\Delta x\right)\right)^2}}\right)=2$$

על מנת שהגבול ב-5 יהיה קיים, חייב להתקיים $5a+b=2$.

כאשר פותרים את שתי המשוואות שקיבלנו, מקבלים $a=-\frac{2}{3},\ b=\frac{16}{3}$.

2. הציבו בפונקציה f את ערכי ה-a,b שמצאתם בסעיף הקודם. האם f גזירה בנקודה $x=2$? הוכיחו את תשובתכם!

<u>פתרון</u>

נציב את הערכים $a=-\frac{2}{3},\ b=\frac{16}{3}$ בפונקציה ונקבל:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{\sin\left(x^2-4\right)}{x-2} & x<2\\ -\frac{2}{3}x+\frac{16}{3} & 2\le x\le 5\\ \sqrt{4+\frac{1}{\left(\ln\left(x-5\right)\right)^2}} & 5<x\end{cases}.$$

נחשב נגזרת לפי הגדרה בנקודה $x=2$.

מצד שמאל, עבור $0>\Delta x\approx 0$ מקבלים:

$$st\left(\frac{f\left(2+\Delta x\right)-f\left(2\right)}{\Delta x}\right)=st\left(\frac{\frac{\sin\left(4\Delta x+\left(\Delta x\right)^2\right)}{\Delta x}-4}{\Delta x}\right)=st\left(\frac{\sin\left(4\Delta x+\left(\Delta x\right)^2\right)-4\Delta x}{\left(\Delta x\right)^2}\right)=1$$

המעבר האחרון מתקיים בגלל החישובים שעשינו בסעיף א'.

מצד ימין, עבור $0<\Delta x\approx 0$ מקבלים:

$$st\left(\frac{f\left(2+\Delta x\right)-f\left(2\right)}{\Delta x}\right)=st\left(\frac{-\frac{2}{3}\left(2+\Delta x\right)+\frac{16}{3}-4}{\Delta x}\right)=-\frac{2}{3}.$$

סה"כ, מכיוון ש-$-\frac{2}{3}\neq 1$, נקבל שהפונקציה אינה גזירה בנקודה $x=2$.

ג. (5 נקודות) התבוננו שוב בפונקציה f מסעיף ב' והציבו בה את הערכים $a=1, b=1$.

נתון שעבור הערכים האלה, f אינה רציפה בנקודה $x=2$. מהו סוג אי-הרציפות שם (סליקה, מין ראשון, מין שני)? הוכיחו את תשובתכם!

__פתרון__

נציב את הערכים $a=1, b=1$ בפונקציה ונקבל את

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{\sin\left(x^2-4\right)}{x-2} & x<2\\ x+1 & 2\le x\le 5\\ \sqrt{4+\frac{1}{\left(\ln\left(x-5\right)\right)^2}} & 5<x\end{cases}.$$

נבדוק את הגבולות החד-צדדיים בנקודה $x=2$.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{\sin(x^2-4)}{x-2} = 4$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x+1) = 3$$

מכיוון שהגבולות החד-צדדיים קיימים ומתקיים $\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$, נסיק שב-

$x=2$ יש נקודת אי-רציפות ממין ראשון (קפיצה).

<u>שאלה 4</u>

קבעו לגבי כל טור אם הוא מתכנס בתנאי, מתכנס בהחלט או מתבדר. הוכיחו את תשובתכם!

א. (7 נקודות) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\ln n}}$.

<u>פתרון</u>

הסדרה $a_n = \frac{1}{2^{\ln n}}$ היא סדרה חיובית יורדת, ולכן ניתן להשתמש במבחן העיבוי.

לכן, הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\ln n}}$ מתכנס אם ורק אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{\ln 2^n}}$ מתכנס.

מתקיים: $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{\ln 2^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{n\ln 2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\left(2^{\ln 2}\right)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{2^{\ln 2}}\right)^n$.

קיבלנו טור גיאומטרי עם $q = \frac{2}{2^{\ln 2}} > 1$, ולכן הוא מתבדר.

לסיכום, הטור המקורי <u>מתבדר</u>.

ב. (7 נקודות) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{\sqrt{n^4-3n^2}}$.

<u>פתרון</u>

נבדוק התכנסות בהחלט:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n 2n}{\sqrt{n^4-3n^2}}\right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^4-3n^2}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2(n^2-3)}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n^2-3}}.$$

ניעזר במבחן השוואה: $\frac{2}{\sqrt{n^2-3}} \ge \frac{2}{n}$.

(אי-השוויון מתקיים בגלל ש- $n = \sqrt{n^2} \ge \sqrt{n^2-3}$.)

לכן, לפי מבחן השוואה עם הטור ההרמוני $\sum \frac{1}{n}$ נקבל שהטור המקורי אינו מתכנס בהחלט.

כעת, הסדרה $\frac{2}{\sqrt{n^2-3}} = \frac{2n}{\sqrt{n^4-3n^2}} = a_n$ היא חיובית, מונוטונית יורדת ומתכנסת לאפס.

לכן, לפי משפט לייבניץ, הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{\sqrt{n^4-3n^2}}$ מתכנס.

לסיכום, הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{\sqrt{n^4-3n^2}}$ מתכנס בתנאי.

ג. (7 נקודות) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{n!(n+1)!}$.

פתרון

נשתמש במבחן המנה:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(3(n+1))!}{(n+1)!(n+2)!}}{\frac{(3n)!}{n!(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{(n+1)(n+2)} = \infty > 1.$$

לפי מבחן המנה, הטור מתבדר.

שאלה 5

א. (15 נקודות) תהיינה $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ שתי פונקציות רציפות. נתון שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $f(x)\cdot g(x)>0$. נתון בנוסף כי $f(2)=3$. הוכיחו ש- f ו- g הן פונקציות חיוביות, כלומר, לכל $x\in\mathbb{R}$, $f(x)>0$ וגם $g(x)>0$.

פתרון

נתחיל עם f, ונניח בשלילה שקיים $x_0\in\mathbb{R}$ עבורו $f(x_0)\le 0$. מכיוון ש- $f(x_0)\le 0$ וגם $f(2)>0$, נקבל, לפי משפט ערך הביניים, שקיימת נקודה c בין 2 ל- x_0 עבורה $f(c)=0$. זו סתירה לנתון לפיו אמור להתקיים $f(c)g(c)>0$.

לכן $f(x)>0$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

כעת נוכיח עבור g. תחילה נשים לב ש- $g(2)>0$, שכן $f(2)g(2)>0$. כעת נניח בשלילה שקיים $x_0\in\mathbb{R}$ עבורו $g(x_0)\le 0$. בדומה למקרה הקודם נקבל שקיימת נקודה c בין 2 ל- x_0 עבורה $g(c)=0$, בסתירה לנתון.

לכן $g(x)>0$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

ב. (10 נקודות) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה המקיימת $f(x)=(f(x))^2$ לכל $x\in\mathbb{R}$. הוכיחו ש- f היא פונקציה קבועה.

פתרון

תחילה נפרש את הנתון: $f(x)=(f(x))^2$ אמ"מ $(f(x))^2-f(x)=0$ אמ"מ $f(x)(f(x)-1)=0$. לכן, לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים: $f(x)=0\vee f(x)=1$. כלומר, אפס ואחד הם שני הערכים היחידים שהפונקציה יכולה לקבל.

נוכיח ש- f היא הפונקציה הקבועה 0 או הפונקציה הקבועה 1.

נניח בשלילה שקיימות שתי נקודות $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש- $f(a)=1\wedge f(b)=0$.

מכיוון ש- f היא פונקציה רציפה, לפי משפט ערך הביניים היא מקבלת את כל הערכים בין 0 ל-1. בפרט, קיימת נקודה c בין a ל-b עבורה $f(c)=\frac{1}{2}$. זו סתירה לנתון, שכן במקרה זה $f(c)\neq(f(c))^2$.

לכן, f היא הפונקציה הקבועה 0 או הפונקציה הקבועה 1.

<u>שאלת בונוס</u> (7 נקודות)

תהי $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה ויהיו $a<b\in\mathbb{R}$. נניח שקיימת סביבה של a שבה $g'(x)<0$. נתון בנוסף ש-$g(a)<g(b)$. הוכיחו שקיימת נקודה $c\in(a,b)$ עבורה $g'(c)=0$.

הערה: שימו לב שנגזרת של פונקציה גזירה אינה בהכרח רציפה!

<u>פתרון</u>

לפי הנתון קיימת סביבה של a בה הפונקציה יורדת, ולכן קיימת נקודה $x_1\in(a,b)$ כך ש-$g(a)>g(x_1)$.

נתבונן בקטע $[x_1,b]$. הפונקציה g רציפה בקטע זה, ומתקיים $g(b)>g(a)\ \wedge\ g(x_1)<g(a)$ ולכן, לפי משפט ערך הביניים, קיימת נקודה $x_2\in(x_1,b)$ עבורה $g(x_2)=g(a)$.

כעת נתבונן בקטע $[a,x_2]$. הפונקציה g רציפה בקטע זה, וגזירה בקטע הפתוח. כמו כן, מתקיים: $g(a)=g(x_2)$ ולכן, לפי משפט רול, קיימת נקודה $c\in(a,x_2)$ עבורה $g'(c)=0$.

בהצלחה בהמשך השנה!