תרגיל 2

1. תזכורת: הגדרנו בכיתה את המטריקה הp - אדית באופן הבא: עבור $p \in \mathbb{N}$ ראשוני, מגדירים $k(x,y) = \max\{i : p^i | (x-y)\}$. ו $d_p(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \dfrac{1}{p^{k(x,y)}} & x \neq y \end{cases}$.
   א. הוכיחו: $p^n \to 0$ במטריקה הp- אדית.
   ב. עבור $z \in \mathbb{Z}$ תנו דוגמא לסדרה לא קבועה ששואפת לz במרחב $(\mathbb{Z}, d_3)$.

2. תהי $\{x_n\}$ סדרה במרח מטרי (X,d). נאמר ש $\{x_n\}$ קבועה לבסוף, אם יש $x \in X$ ו $n_0 \in \mathbb{N}$, כך ש $x_n = x\ \forall n \geq n_0$.
   א. הוכיחו שבמרחב מטרי כל סדרה קבועה לבסוף מתכנסת.
   ב. הוכיחו שבמרחב מטרי דיסקרטי כל סדרה מתכנסת קבועה לבסוף.

3. במרחב l_∞ הראו שהסדרה $x_n = (\dfrac{n+1}{n}, \dfrac{n+2}{2n}, \dfrac{n+3}{3n}, ...)$ מתכנסת, ומצאו את גבולה.

4. נתבונן במרחב (X,d) כאשר X היא קבוצת המספרים האי רציונליים, וd היא המטריקה המושרית מ$\mathbb{R}$.
   א. הוכיחו את הטענה הכללית הבאה: אם (M,τ) הוא מרחב מטרי ו (Y,τ_Y) תת מרחב עם המטריקה המושרית, אז לכל $\{x_n\} \subseteq Y$ ו $x \in Y$, $x_n \to x$ לפי τ, אמ"ם $x_n \to x$ לפי τ_Y.
   ב. נסתכל על הסדרה $x_n = \dfrac{n+\sqrt{2}}{n-\sqrt{2}}$. הוכיחו ש $\{x_n\} \subseteq X$.
   ג. הוכיחו ש $\{x_n\}$ לא מתכנסת ב X.

5. יהי (X,d) מרחב מטרי, ותהי $\{x_n\} \subseteq X$ סדרת קושי. הוכיחו שאם יש ל$\{x_n\}$ תת סדרה מתכנסת, אז $\{x_n\}$ מתכנסת.

6. האם קיים שיכון איזומטרי בין המרחבים הבאים? הוכיחו או הפריכו.

   (א) $\mathbb{Q} \cap (2016, \infty) \to \{\sqrt{3} - \frac{n}{2n+5} \mid n \in \mathbb{N}\}$ (המטריקות כאן הן $d(x,y) = |x-y|$)

   (ב) $(\mathbb{Z}, d_5) \to (\mathbb{Z}, d_7)$

7. יהי (X,d) מרחב מטרי.

(א) הוכיחו כי לכל $x \in X$ מתקיים כי $\{x\}$ תת קבוצה סגורה של X.

(ב) תנו דוגמא נגדית לסעיף א' אם X הוא רק מרחב פסאודו מטרי.

(ג) הוכיחו כי כל קבוצה סופית היא סגורה.

8. הוכיחו שבמרחב $(\mathbb{Z}, d_p)$ כל כדור פתוח שמרכזו באפס $B(0,r)$ הוא קבוצה סגוחה ותת חבורה.

9. יהי X המרחב המטרי של כל הסדרות מעל $\mathbb{R}$. המטריקה היא $d(a_n, b_n) = \frac{1}{m}$ כאשר m הוא האינדקס המינימלי שבו $a_m \neq b_m$. (כמובן אם הסדרות זהות המרחק הוא 0).

(א) הוכיחו כי קבוצת הסדרות המתחילות ב $0, 1, 2$ או ב $3, 4, 5, 6$ היא קבוצה פתוחה.

(ב) הוכיחו כי קבוצת הסדרות הקבועות היא קבוצה סגורה.

10. הוכיחו/הפריכו: אם $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה חח"ע ועל, אז $(\mathbb{R}, d_f)$ הוא מרחב שלם, כאשר $d_f(x,y) = |f(x) - f(y)|$

11. הוכיחו/ הפריכו: המרחבים הבאים שלמים:

(א) מרחב כל הסדרות הממשיות המתאפסות לבסוף, עם מטריקת הסופרימום.

(ב) $\mathbb{R}^N$ עם המטריקה: $d((x_1, ..., x_N), (y_1, ..., y_N)) = \max_i |x_i - y_i|$