

פתרון של הבוחן

1. א. בעזרת משפט גרין הוכיחו את נוסחת השטח הבאה עבור קבוצה סגורה וחסומה D ב- $\mathbb{R}^2$:

$$\text{Area}(D) = \int_{\partial D} x dy$$

כאשר ∂D מכוונת נגד כיוון השעון.

ב. נסמן ב- P את המצולע שהקודקודים שלו הם

$$(0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16)$$

(הקודקודים של P הם בסדר זה משמאל לימין). מצאו את השטח של P .

פתרון: א. אם נציב $P = 0$ ו- $Q = x$ בנוסחת גרין נקבל מיד את נוסחת השטח המבוקשת.

ב. לפי נוסחת השטח מסעיף א' מתקיים

$$\text{Area}(P) = \int_{\partial P} x dy.$$

השפה ∂P של p מורכבת מקבוצת הקטעים המחברים את הקודקודים של P . לקטע המתחיל מהנקודה (x_1, y_1) ומסתיים בנקודה (x_2, y_2) יש את הפרמטריזציה

$$\gamma(t) = t(x_2, y_2) + (1-t)(x_1, y_1) = (x_1 + (x_2 - x_1)t, y_1 + (y_2 - y_1)t), t \in [0, 1].$$

לכן, אינטגרל השטח על קטע זה הוא

$$\int_0^1 (x_1 + (x_2 - x_1)t)(y_2 - y_1) dt = \frac{(y_2 - y_1)(x_1 + x_2)}{2}.$$

כיוון שהקטע הראשון מתחיל מהנקודה $(0, 0)$ ומסתיים ב- $(1, 1)$ וכך הלאה עד הקטע האחרון המתחיל ב- $(4, 16)$ ומסתיים ב- $(0, 0)$ נקבל שהשטח של המצולע P הוא

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} ((1-0)(1+0) + (4-1)(2+1) + (9-4)(3+2) \\ & + (16-9)(4+3) + (0-16)(0+4)) = 10. \end{aligned}$$

2. נסמן ב- $M_2(\mathbb{R})$ את אוסף כל המטריצות הממשיות בגודל 2×2 . נשים לב שכמרחבים וקטוריים $\mathbb{R}^4$ ו- $M_2(\mathbb{R})$ איזומורפיים. נסמן

$$SL_2(\mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \det A = 1\}.$$

קבעו האם SL_2 הוא משטח ב- $M_2(\mathbb{R})$. במידה וכן, קבעו את המימד שלו.

פתרון: עבור $A \in M_2(\mathbb{R})$ מהצורה

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

מתקיים $\det A = x_1x_4 - x_2x_3$. לכן כיוון ש- $\mathbb{R}^4$ ו- $M_2(\mathbb{R})$ איזומורפיים עלינו לקבוע האם הקבוצה

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1x_4 - x_2x_3 = 1\}$$

מהווה משטח ב- $\mathbb{R}^4$. כעת נשים לב ש- M הוא הפתרון של המשוואה

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_4 - x_2x_3 - 1 = 0.$$

כיוון ש- F גזירה ברציפות נשאר לבדוק האם הדרגה של הדיפרנציאל של- F מקסימלית לכל נקודה על M . ניזכר שעבור פונקציה

$$\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

הגדרנו את הדיפרנציאל $D_\Phi(x)$ של Φ בנקודה $x \in \mathbb{R}^n$ לפי

$$D_\Phi(x) \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

כיוון שבמקרה שלנו $n = 4$ ו- $m = 1$ נקבל שהדיפרנציאל $D_F(x)$ הוא למעשה הגראדינט של F ב- $\mathbb{R}^4$: $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$

$$D_x F(x) = (\nabla F)(x) = (x_4, -x_3, -x_2, x_1).$$

לכן הדרגה של $D_x F(x)$ איננה מקסימלית רק במקרה ש-

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$$

(בכל מקרה אחר הדרגה היא 1 שזו הדרגה המקסימלית עבור מטריצה עם שורה אחת). אבל אם $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ אז $x \notin M$ כי לא מתקיים

$$x_1x_4 - x_2x_3 - 1 = 0.$$

לכן הדרגה של $D_x F$ מקסימלית לכל $x \in M$ ולכן M הוא משטח. כדי לקבוע את המימד של M נשתמש בנוסחא שלמדנו בשיעור

$$\dim(M) = n - m = 4 - 1 = 3.$$

3. חשבו את השטח של המשטח $az = xy$ ($a > 0$) הכלוא בתוך הגליל $x^2 + y^2 = a^2$.

פתרון: נבצע את הפרמטריזציה הבאה למשטח:

$$\phi(x, y) = \left(x, y, \frac{xy}{a} \right), x^2 + y^2 \leq a^2.$$

כעת נחשב את הנורמל והנורמה שלו

$$n = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & \frac{y}{a} \\ 0 & 1 & \frac{x}{a} \end{vmatrix} = \left(-\frac{y}{a}, -\frac{x}{a}, 1 \right) \Rightarrow |n| = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}}.$$

לכן מנוסחת השטח נקבל שהשטח של המשטח הנתון הוא

$$\begin{aligned} \int_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}} dx dy &= (x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, dx dy = r d\theta dr) \\ &= \int_0^a \int_{-\pi}^{\pi} r \sqrt{1 + \frac{r^2}{a^2}} d\theta dr = \left(t = 1 + \frac{r^2}{a^2}, dt = \frac{2r dr}{a^2} \right) \\ &= \frac{a^2}{2} \int_1^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{t} d\theta dt = \frac{a^2}{2} \int_1^2 \sqrt{t} \theta \Big|_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} dt \\ &= a^2 \pi \int_1^2 \sqrt{t} dt = a^2 \pi \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_{t=1}^{t=2} = \frac{2a^2 \pi}{3} (2\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$