

אלגברה לינארית - תרגול 1

19 באוקטובר 2020

1 שדות

שדה זו קבוצה $\mathbb{F}$ עם תכונות מסויימות כמופיע בהרצאה, יש שם איברים שקראנו להם 0 שניטרלי לחיבור, 1 שניטרלי לכפל, ועוד כמה תכונות. ראיתם שני שדות:

1. שדה הממשיים $\mathbb{R}$, הישר המוכר לנו

2. שדה המרוכבים:

$$\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

לדוג'.

$$5 - \pi i, 3 = 3 + 0i, i = 0 + 1i$$

יתרון המרוכבים: לכל פולינום יש פתרון:

$$x^2 + 4 = 0$$

בממשיים אין פתרון, ואילו במרוכבים יש פתרון: $x = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$

2 שדה המרוכבים

נגדיר פעולות במרוכבים:

• חלק ממשי: עבור $z = a + bi$ מתקיים: $Re(z) = a$. לדוגמא $Re(-5 + 3i) = -5$

• חלק מדומה: עבור $z = a + bi$ מתקיים: $Im(z) = b$. $Im(-5 + 3i) = 3$

• חיבור: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.
 $(e - \pi i) + (\pi - ei) = (e + \pi) + (-e - \pi)i = (e + \pi) - (e + \pi)i$

• כפל: $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$. לדוגמא: $(e + \pi) \cdot (1 - i) = (e + \pi)i - (e + \pi)$

• איבר ניטרלי לכפל: $1 = 1 + 0i$, איבר ניטרלי לחיבור: $0 = 0 + 0i$.

תרגילים:

1. פתרו את המשוואה:

$$z^2 + 2z + 1 - \frac{1}{2}i = 0$$

פתרון: בעזרת נוסחת השורשים, כאשר $a = 1, b = 2, c = 1 - \frac{1}{2}i$ נקבל:

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1 - \frac{1}{2}i)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2i}}{2}$$

איד מוצאים את שורש $2i$? נסמן $w = a + bi$ ונרצה $2i = w^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ עכשיו נשווה בין החלקים הממשיים והמדומים:

$$\begin{cases} 0 = a^2 - b^2 & Re \\ 2 = 2ab & Im \end{cases}$$

נשים לב ש- $b \neq 0$ (בגלל המשוואה השנייה), ולכן מותר לחלק בו ונקבל $a = \frac{1}{b}$. נציב בראשונה:

$$0 = \left(\frac{1}{b}\right)^2 - b^2$$

נכפיל את המשוואה ב- b^2 :

$$b^4 = 1$$

ולכן $b = \pm 1$ ולכן $a = \pm 1$. כלומר:

$$w = \pm(1 + i)$$

נחזור לנוסחא:

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm (1 + i)}{2}$$

$$z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, z_2 = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$$

2.1 הצמוד המרוכב

הגדרת הצמוד: עבור $z = a + bi$, הצמוד המרוכב מוגדר להיות: $\bar{z} = a - bi$.
דוגמאות:

$$\overline{5 - 5i} = 5 + 5i \bullet$$

$$\overline{-3} = -3 \bullet$$

תכונות הצמוד:

$$\overline{\overline{(2 - 3i)}} = \overline{2 + 3i} = 2 - 3i \text{ לדוגמא: } \overline{(\bar{z})} = z \quad 1.$$

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \quad 2.$$

$$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w} \quad 3.$$

$$(5 + 5i) + (5 - 5i) = 10 \text{ נקבל: } z = 5 + 5i \text{ עבור } z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) \quad 4.$$

$$(5 + 5i) - (5 - 5i) = 10i \text{ נקבל: } z = 5 + 5i \text{ עבור } z - \bar{z} = 2\operatorname{Im}(z) \cdot i \quad 5.$$

$$(3 + 2i)(3 - 2i) = \text{לדוגמא: } z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R} \quad 6.$$

$$9 + 4 + (6 - 6)i = 13$$

$$\overline{-3 + 0i} = -3 - 0i = -3 \text{ לדוגמא } z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R} \quad 7.$$

$$2i = -(-2i) = -\bar{2i} \text{ (נקרא מדומה טהור). } z = -\bar{z} \iff \operatorname{Re}(z) = 0 \quad 8.$$

תרגילים:

$$z + z\bar{z} = 3\frac{3}{4} + 2i \text{ פתרו את המשוואה: } 1.$$

פתרון: נסמן $z = a + bi$ ונקבל:

$$z + z\bar{z} = a + bi + a^2 + b^2 = 3\frac{3}{4} + 2i$$

ועכשיו נקבל מערכת:

$$\begin{cases} a + a^2 + b^2 = 3\frac{3}{4} & \operatorname{Re} \\ b = 2 & \operatorname{Im} \end{cases}$$

נציב את השנייה בראשונה ונקבל:

$$a^2 + a + \frac{1}{4} = 0$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

$$z = -\frac{1}{2} + 2i \text{ ולכן}$$

2. הוכיחו שלמשוואה $z + \bar{z} = \operatorname{Re}(z) + 2i$ אין פתרון
 פתרון: נשים לב שאגף שמאל הוא ממשי (כי $z + \bar{z} = \operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}$), ולכן $\operatorname{Im}(Left) = 0$.
 נניח בשלילה שיש שיוויון, באגף ימין כיון שחלק הממשי הוא ממשי נקבל
 $\operatorname{Im}(Right) = 2 \neq 0 = \operatorname{Im}(Left)$ בסתירה לשיוויון.

3. יהא $p(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$ פולינום עם מקדמים ממשיים. כלומר,
 $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. נתון: $p(w) = 0$ (כלומר, w שורש של p). במילים אחרות:

$$a_0 + a_1w + a_2w^2 + \dots + a_nw^n = 0$$

הוכיחו: $p(\bar{w}) = 0$
 הוכחה:

$$\begin{aligned} 0 = \bar{0} &= \overline{a_0 + a_1w + a_2w^2 + \dots + a_nw^n} = \overline{a_0} + \overline{a_1w} + \dots + \overline{a_nw^n} = \overline{a_0} + \overline{a_1} \cdot \bar{w} + \dots + \overline{a_n} \cdot \bar{w}^n \\ &\stackrel{3,7}{=} a_0 + a_1\bar{w} + a_2\bar{w}^2 + \dots + a_n\bar{w}^n = p(\bar{w}) \end{aligned}$$

וקיבלנו $p(\bar{w}) = 0$

2.2 ערך מוחלט

נכליל את הערך המוחלט הממשי, ע"י מרחק הנקודה מהראשית, במישור. כלומר:

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

תכונות הערך המוחלט:

$$1. |z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

$$2. |z| \in \mathbb{R}$$

3.

$$(א) |z| \geq 0$$

$$(ב) |z| = 0 \iff z = 0$$

$$4. |z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

$$5. |z + w| \leq |z| + |w| \text{ לדוגמא: } |2 + (-4)| = |-2| < 6 = |2| + |-4|$$

$$6. |z| = |-z| = |\bar{z}|$$

תרגילים:

1. מצאו מספר מרוכב z המקיים: $|z| = 5, \operatorname{Im}(z) = 2$.
פתרון: נסמן $z = a + bi$, ואז $b = 2$, ולכן:

$$5 = |z| = \sqrt{a^2 + 4}$$

$$a = \pm\sqrt{21}$$

אז למשל $z = \sqrt{21} + 2i$ מקיים.

2.3 חילוק

המרוכבים הוא שדה, ולכן לכל $z \neq 0$ קיים הופכי. כלומר, יש z^{-1} המקיים:

$$z \cdot z^{-1} = 1$$

השאלה איך למצוא את ההופכי.

לדוגמא: עבור $z = 5 - 2i$, ההופכי שלו:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{5 - 2i} = \frac{1}{5 - 2i} \cdot \frac{5 + 2i}{5 + 2i} = \frac{5 + 2i}{29} = \frac{5}{29} + \frac{2}{29}i$$

תרגילים

1. עבור $z = \frac{2+3i}{5-i}$, הציגו אותו בצורה $z = a + bi$, ומצאו ערך מוחלט וצמוד.
פתרון:

$$z = \frac{2+3i}{5-i} = \frac{2+3i}{5-i} \cdot \frac{5+i}{5+i} = \frac{7+17i}{26} = \frac{7}{26} + \frac{17}{26}i$$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{7}{26}\right)^2 + \left(\frac{17}{26}\right)^2} = \sqrt{\frac{49+289}{26^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$