מבוא לטופולוגיה - תרגיל בית 6 (פתרון)

1.א' קודם כל נוכיח ש-

$$(*) \quad \bar{A} = ((A^c)^\circ)^c$$

<u>הוכחת (*):</u> נקודה x שייכת ל-$\bar{A}$ $\Leftrightarrow$
לכל סביבתה U_x : $U_x \cap A \neq \emptyset$ $\Leftrightarrow$
כל סביבתה U_x אינה מוכלת ב-A^c $\Leftrightarrow$
נקודה x אינה נקודה פנימית של A^c $\Leftrightarrow$

$$x \notin (A^c)^\circ \Leftrightarrow x \in ((A^c)^\circ)^c \quad \blacksquare \ (*)$$

אם נחליף בנוסחה (*) A ל- A^c ולהפך, נקבל:

$$\overline{A^c} = (A^\circ)^c \quad (**),$$

<u>$(*)\wedge(**)\Rightarrow \bar{A} \cap \overline{A^c} = (A^\circ)^c \cap ((A^c)^\circ)^c$</u>

חיתוך של שני אגפים (**) עם $\bar{A}$ נותן:

<u>$\bar{A} \cap \overline{A^c} = \bar{A} \cap (A^\circ)^c = \bar{A} - A^\circ$</u>

ב' $Bd(A)$ סגורה כחיתוך סגורות:

$$Bd(A) = \bar{A} \cap \overline{A^c}$$

2. <u>תשבה:</u> המרחב (X,τ) קשיר אם X קבוצה אינסופית ולא קשיר אם X קבוצה סופית.

הוכחה. יהי המרחב לא קשיר. זה יכול להיות א"א קיימות A, B - שתי תת-קבוצות פתוחות ולא ריקות כך ש- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = X$. בטופולוגיה τ זה אומר: שתי קבוצות A ו-$A^c = B$ סופיות בוזמנית. זה יכול להיות א"א X קבוצה סופית.

3. יהיו:

$$P_1 = \{p = (x, y.z) \in \mathbb{R}^3 |\ f_1(p) = x + y + z = 0\}$$
$$P_2 = \{p = (x, y.z) \in \mathbb{R}^3 | f_2(p) = x + y + z = 5\}$$
$$P_3 = \{p = (x, y.z) \in \mathbb{R}^3 | f_3(p) = 2x + 3y + z = 0\}$$
$$P_4 = \{p = (x, y.z) \in \mathbb{R}^3 | f_4(p) = 4x + 5y + z = 0\}$$

אזי $X = P_1 \cup P_2$ ו- $Y = P_3 \cup P_4$.

קל להוכיח שפונקציות $f_i: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ רציפות (באזרת סדרות, למשל). לכן $f_1|_{P_1}$ ו- $f_2|_{P_2}$ רציפות.

נסמן: $g_1: X \to \mathbb{R}$ כאשר $g_1 = \begin{cases} f_1|_{P_1} \\ f_2|_{P_2} \end{cases}$

אזי g_1 רציפה (ההרצאות, בנית פונקציות רציפות מפונקציות על תת-קבוצות סגורות).

אזי <u>$g_1^{-1}(\{0,5\}) = X$ מרחב לא קשיר</u> (ההרצאות, קריטריון הקשירות).

<u>תזכורת.</u> מהקורסים הקודמים או מתכון ידוע:

3.1. P_3, P_4 מישורים במרחב $\mathbb{R}^3$

3.2. כל שתי נקודות במישור אפשר לחבר על ידי קטע. אפשר להציג את הקטע כתמונה של פונקציה רציפה $\varphi: [0,1] \to P_i$.

P_3, P_4 משורים נכתכים: אם להציב

$x = y = z = 0$ במשוואות

$f_3(p) = 2x + 3y + z = 0$

$f_4(p) = 4x + 5y + z = 0$

רואים שהחיתוך שלהם מכיל את הנקודה

$o = (0,0,0)$

במונחים של ההרצאה האחרונה: φ מ-3.2 זו מסילה בין שתי נקודות.

לכן מ-3.2 נובע שכל נקודה ב- P_3 וב-P_4 אפשר לחבר עםנקודה 0 על ידי מסילה. אזי כל שתי a, b נקודות ב-Y אפשר לחבר על ידי מסילה (מורכבת משתי חוליות מ-a ל-0 ומ-0 ל- b).

זה אומר ש-Y מרחב קשיר מסילתית. אזי הוא קשיר (הרצאה).

מסקנה: X ו-Y לא הומאומורפיים כי X לא קשיר.