

תרגיל 7 בפונקציות מרוכבות

1. חשבו את האינטגרלים הבאים (המסילות הסגורות הן נגד כיוון השעון)

(א)

$$\int_{|z|=5} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$$

פתרון: לפי נוסחת קושי לנגזרות עם

$$f(z) = e^{2z}$$

נקבל ש

$$\int_{|z|=5} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz = \frac{2\pi i}{3!} f^{(3)}(-1) = \frac{2\pi i}{6} \cdot 8e^{-2} = \frac{8\pi i}{3e^2}$$

(ב)

$$\int_{|z-1|=1} \frac{\cos \pi z}{(z^2-1)^2} dz$$

פתרון: קל לראות שבעצם יש לנו:

$$\int_{|z-1|=1} \frac{\cos \pi z}{(z+1)^2(z-1)^2} dz$$

בתחום המדובר

$$f(z) = \frac{\cos \pi z}{(z+1)^2}$$

אנליטית ולכן

$$\int_{|z-1|=1} \frac{\cos \pi z}{(z+1)^2(z-1)^2} dz = 2\pi i f'(1) = 2\pi i \frac{-\sin \pi \cdot 4 - 2(1+1) \cos \pi}{2^4} = \frac{\pi i}{2}$$

2. תהייה $f(z)$ ו $g(z)$ פונקציות שלמות כך ש $|f(z)| < |g(z)|$ לכל $z \in \mathbb{C}$. הוכיחו כי $f(z) = cg(z)$ כך ש $c \in \mathbb{C}$ עם $|c| < 1$.

פתרון: נשים לב ש $g(z)$ לא יכולה להתאפס כי $|f(z)| < |g(z)|$ כלומר יש מספר אי שלילי ש $|g(z)|$ גדול ממנו. לכן

$$\frac{f(z)}{g(z)}$$

היא פונקציה שלמה ומתקיים

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| < 1$$

לכן לפי ליוביל

$$\frac{f(z)}{g(z)} = c$$

כלומר

$$f(z) = cg(z)$$

כמוכן היות ש

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| < 1$$

בהכרח

$$|c| < 1$$

כנדרש.

3. תהי $f(z)$ פונקציה שלמה. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות

(א) אם לכל z מתקיים $f(z) = f(iz)$ אז f קבועה.

פתרון: לא נכון. $f(z) = z^4$ היא דוגמא נגדית.

(ב) אם לכל z מתקיים $f(z) = f(3z)$ אז f קבועה.

פתרון: על עיגול היחידה $\{z \mid |z| \leq 1\}$ אנחנו יודעים ש $f(z)$ חסומה כי היא

רציפה. כלומר קיים M כך שלכל z המקיים $|z| \leq 1$ מתקיים $|f(z)| \leq M$

אבל לכל $z \in \mathbb{C}$ יש n טבעי כך ש $|\frac{z}{3^n}| \leq 1$ ואז

$$|f(z)| = |f(\frac{z}{3})| = |f(\frac{z}{3^2})| = \dots = |f(\frac{z}{3^n})| \leq M$$

ולכן $f(z)$ חסומה ולכן קבועה.

4. תהי $f(z)$ פונקציה שלמה המקיימת $|f(z) - f(2z)| \leq 10$, הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.

פתרון: נגדיר $g(z) = f(z) - f(2z)$ היא גם פונקציה שלמה אבל היא חסומה ולכן

$g(z)$ קבועה. כלומר קיים c כך ש $f(z) - f(2z) = c$. אם נציב $z = 0$ נגלה ש $c = 0$

ולכן $f(z) = f(2z)$. מכאן מוכיחים ש f קבועה כמו בשאלה 4.