מבוא לטופולוגיה - תרגיל בית 4 (פתרון)

.

1. א') תהי x_n סדרת קושי. M קומפקטי לכן ב-x_n קיימת תת-סדרה x_{n_k} המתכנסת לנקודה $x \in M$. נוכיח שגם x_n מתכנסת ל-x.

יהי $\varepsilon > 0$. אזי קיים $K \in \mathbb{N}$ כך ש- $k \geq K \Rightarrow d\left(x_{n_k}, x\right) < \frac{\varepsilon}{2}$. (*)

x_n סדרת קושי לכן קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש- $k, n \geq N \Rightarrow d(x_k, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. (**)

אם נקח $M = \max\{K, N\}$, אזי מ-(*): $M \geq K \Rightarrow d\left(x_{n_M}, x\right) < \frac{\varepsilon}{2}$. $n_M \geq$ $M \geq N$ לכן נקבלים מ-(**): $n \geq M \geq N \Rightarrow d\left(x_{n_M}, x_n\right) < \frac{\varepsilon}{2}$.

לפי אי-שיוויון המשולש:

$n \geq M \Rightarrow d(x_n, x) \leq d\left(x_{n_M}, x\right) + d\left(x_{n_M}, x_n\right) < \varepsilon$.

אזי $x_n \to x$, מ"צל.

ב') אם $M = \emptyset$ אז בתור ε -רשת סופית אפשר לקחת ε –רשת ריקה והכל הוכח!

יהי $M \neq \emptyset$ ונניח (<u>בדרך השלילה</u>) שהמרחב אינו חסום לחלוטין. אזי קיים $\varepsilon > 0$ כך שאינה קיימת ε -רשת סופית ב-M .

נבנה סדרה x_n בצורה אינדוקטיבית כך ש- $\boldsymbol{d(x_k, x_m) \geq \varepsilon}$ **לכל** $\boldsymbol{k \neq m}$**.**

<u>בסיס האינדוקציה</u>. קיים $x_1 \in M$ כי $M \neq \emptyset$.

<u>צעד האינדוקציה</u>. נניח שכבר בנינו n נקודות $x_1, x_2, \dots, x_n \in M$ כך ש- $d(x_k, x_m) \geq \varepsilon$ לכל $k < m \leq n$.

לפי ההנחה: $B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon) \cup \dots \cup B(x_n, \varepsilon) \subset M$.

אזי קיים $x_{n+1} \in M$ כך ש- $d(x_i, x_{n+1}) \geq \varepsilon$ לכל $i \leq n$. מזה ומהנחת האינדוקציה נובע ש-$d(x_k, x_m) \geq \varepsilon$ מתקיים כבר ל- $n+1$ נקודות $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$. הבניה של הסדרה הסתימה.

מכיוון שהמרחב קומפקטי הסדרה x_n מכילה תת-סדרה מתכנסת x_{n_k}.

אזx_{n_k} היא גם סדרת קושי ולכן קיים $M \in \mathbb{N}$ כך ש- $d(x_M, x_{M+1}) < \varepsilon$.

<u>סתירה</u>.

2. א') מספיק להוכיח ש- f רציפה בכל נקודה.

תהי $a \in X$ ויהי $\varepsilon > 0$. אזי קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x_1, x_2 \in X$ מתקיים:

$d_X(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ ובפרט:

$d_X(x, a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$, ז"א, f רציפה ב-a, מצ"ל.

ב') נתבונן במשפחת תת-קבוצות של X $\{U_y\}_{y\in Y}$ כך

ש-$U_y = f^{-1}\left(B\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$.

כל U_y פתוחה כי f רציפה ו- $B\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right)$ פתוחה.

לכל $x \in X$: $f(x) \in B\left(f(x),\frac{\varepsilon}{2}\right)$ ולכן $x \in f^{-1}\left(B\left(f(x),\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$.

זאת אומרת ש- $\{U_y\}_{y\in Y}$ כיסוי פתוח של X.

מכיוון ש-X קומפקטי לכיסוי הזה יש מספר לבג $\delta > 0$ (ההרצאות).

יהיו $x_1, x_2 \in X$ כך ש- $d_X(x_1,x_2) < \delta$. אזי $x_2 \in B(x_1,\delta)$. לפי הגדרתו של מספר לבג קיימת נקודה $y \in Y$ כך ש- $B(x_1,\delta) \subseteq f^{-1}\left(B\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$

ולכן $f(B(x_1,\delta)) \subseteq B\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right)$. מזה מקבלים: $f(x_1), f(x_2) \in B\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right)$

ו- $d_Y(f(x_1), f(x_2)) \le d_Y(f(x_1), y)) + d_Y(y, f(x_2)) < \varepsilon$, מצ"ל.

3. <u>$\Leftarrow$</u> תהי f רציפה, $p \in X$ ו- $V \subseteq Y$ - סביבה פתוחה של $f(p)$.
לפי הגדרתה של פונקציה רציפה: $U = f^{-1}(V)$ - קבוצה פתוחה. ברור גם ש- $p \in U$. וסופית: $f(U) = f\left(f^{-1}(V)\right) = V$. לכן f רציפה בנקודה p.
<u>$\Rightarrow$.</u> תהי f רציפה בכל נקודה של X ותהי $B \subseteq Y$ פתוחה. נוכיח ש- $A = f^{-1}(B)$ פתוחה. לפי הנחה לכל $a \in A$ קיימת סביבה פתוחה U_a של a כך ש- $f(U_a) \subseteq B$. מזה נובע (לפי הגדרה של A) $U_a \subseteq A$. לפי הלמה השימושית (ההרצאות) $A = \cup_{a\in A} U_a$. לכן A פתוחה כאיחוד קבוצות פתוחות ואז f רציפה.

4. א') נסמן טופולוגיה של מרחב טופולוגי T ב-τ_T. אם $S \subseteq T$ תת-מרחב טופולוגי של T נסמן את הטופולוגיה המושרת מ-T ל- S ב-τ_{S_T}. אז לפי הסימון הזה <u>צריך להוכיח</u> ש- $\tau_{A_{B_X}} = \tau_{A_X}$.

<u>$\subseteq$.</u>

$$U \in \tau_{A_{B_X}} \Rightarrow \exists V \in \tau_{B_X}: U = A \cap V$$

$$V \in \tau_{B_X} \Rightarrow \exists W \in \tau_X: V = B \cap W$$

$$U = A \cap B \cap W = A \cap W \Rightarrow U \in \tau_{A_X}$$

<u>$\supseteq$.</u>

$$U \in \tau_{A_X} \Rightarrow \exists W \in \tau_X: U = A \cap W = (A \cap B) \cap W = A \cap (B \cap W)$$

$$B \cap W \in \tau_{B_X} \Rightarrow U = A \cap (B \cap W) \in \tau_{A_{B_X}}$$

ב') תהי F סגורה ב-X. אזי F^c פתוחה ב-X $\Leftarrow$ $A \cap F^c$ פתוחה ב-A לפי הגדרת טופולוגיה בתת-מרחב. אם נסמו ב-F^{c_A} את המשלים של F ב-A אז נקבל: $F^{c_A} = A - F = A \cap F^c$ פתוחה ב-A ולכן F סגורה ב-A לפי ההגדרה.

ג') מהתנאי אפשר להגיד ש- $A - F$ פתוחה ב- A ו-A^c פתוחה ב- X.
אבל לפי חישוב (תורת הקבוצות) :

$$F^c = F^c \cap X = F^c \cap (A \cup A^c) = (F^c \cap A) \cup (F^c \cap A^c) = (A - F) \cup A^c$$

לפי הגדרת טופולוגית תת-מרחב A קיימת U פתוחה ב-X
כך ש- $A - F = U \cap A$.
אזי $F^c = (U \cap A) \cup A^c = (U \cup A^c) \cap X = U \cup A^c$
ולכן F^c פתוחה ב-X. אזי F סגורה ב-X.

5. יהי: $B \subseteq Y$ ו-$B \in \sigma_2$. אזי $B \in \sigma_1$ ולפי הגדרת הרציפות $f^{-1}(B) \in \tau_1$. אז לפי התנאים $f^{-1}(B) \in \tau_2$. לפי הגדרת הרציפות $f: (X, \tau_2) \to (Y, \sigma_2)$ רציפה.

6. נגדיר פונקציה $f: [0, \infty) \to (0,1]$ כך ש- $f(x) = \frac{1}{1+x}$ לכל $x \geq 0$.
(ברור ש- $0 < f(x) \leq 1$ כאשר $x \geq 0$). נוכיח ש-f הומאומורפיזם, או מפורט יותר, נגדיר פונקציה $g: (0,1] \to [0, \infty)$ <u>ונוכיח</u>:

(a) $g \circ f = Id_{[0,\infty)}$

(b) $f \circ g = Id_{(0,1]}$

(c) שתי הפונקציות f, g רציפות

תהי $g(y) = \frac{1}{y} - 1$. אז ברור ש- $g(y) \geq 0$ לכל $0 < y \leq 1$.

$$x = 1 + x - 1 = \frac{1}{\frac{1}{1+x}} - 1 = g(f(x)) = g \circ f(x) \Leftarrow (a)$$

$$y = \frac{1}{1 + \frac{1}{y} - 1} = \frac{1}{1 + g(y)} = f(g(y)) = f \circ g(y) \Leftarrow (b)$$

כדי להוכיח שפונקציה רציפה צריך להוכיח שתמונה הפוכה של קבוצה פתוחה היא קבוצה פתוחה. אבל טופלוגיות בשני המרחבים מושרות מהמרחב האוקלידי $\mathbb{R}$ על ידי המטריקה הרגילה d ב- $\mathbb{R}$.
לכן צריך להוכיח:

- $f^{-1}(V)$ קבוצה פתוחה במרחב מטרי $([0,\infty),d)$ אם V פתוחה במרחב מטרי $((0,1],d)$, זאת אומרת מספיק להוכיח ש-$f:([0,\infty),d) \to ((0,1],d)$ רציפה במובן מרחבים מטריים.
- $g^{-1}(U)$ קבוצה פתוחה במרחב מטרי $((0,1],d)$אם U פתוחה במרחב מטרי $([0,\infty),d)$, זאת אומרת מספיק להוכיח ש-$g:((0,1],d) \to ([0,\infty),d)$ רציפה במובן מרחבים מטריים.

עכשיו ההוכחות האחרונות אפשר לקבל בסגנון סדרות:

$$x_n \geq 0, x_n \to x \Rightarrow \frac{1}{1+x_n} \to \frac{1}{1+x} \in (0,1]\ ,$$

לכן f רציפה.

$$0 < y_n \leq 1, y_n \to y \Rightarrow \frac{1}{y_n} - 1 \to \frac{1}{y} - 1 \in [0,\infty)\ ,$$

לכן g רציפה.

הוכחנו גם את (c). אבל $(a) \wedge (b) \wedge (c) \Leftarrow$ f הומאומורפיזם (הרצאה).